

KRYSTIAN PERA\*

## Koncepcja VaR (value at risk) w pomiarze ryzyka surowcowego projektu inwestycyjnego

### Wprowadzenie

Projekt inwestycyjny rozumiany jako inwestycja rzeczowa charakteryzuje się znacznymi odrębnościami względem inwestycji portfelowych. Warto jednak zauważyć pewną analogię, która pozwala dla oceny rzeczowych projektów inwestycyjnych wykorzystywać (z pewnymi modyfikacjami) narzędzia analizy portfelowej. W szczególności dotyczy to zagadnień ryzyka inwestycyjnego. Założoną w niniejszym opracowaniu perspektywą analizy zagadnienia jest przyjęcie wzajemnej odpowiedniości składników portfela inwestycyjnego ze zmiennymi charakteryzującymi rzeczowy projekt inwestycyjny. W szczególności przedmiotem zainteresowania jest projekt surowcowy (projekt górniczy)<sup>1</sup> i analiza jego ryzyka inwestycyjnego.

Projekt surowcowy jest ryzykowny pod wieloma względami. Wystarczy wspomnieć o niezwykle długim horyzoncie czasowym realizacji inwestycji, wysokim prawdopodobieństwie odkrycia złóż uboższych, nieprzydatnych do zagospodarowania górniczego (w skrajnych przypadkach nieodkrycia ich w ogóle). P. Saługa (Saługa 2006) omawiając katalog cech specyficznych złóż wymienia: unikatowość, wyjątkowe położenie, nieodnawialność, niepewność i niepowtarzalność budowy złoża. Wszystkie te cechy składają się na ryzyko projektu górniczego. W związku z tym poprawna analiza ryzyka należy do najważniejszych elementów kompleksowej oceny projektu inwestycyjnego.

---

\* Dr, Katedra Inwestycji, Akademia Ekonomiczna, Katowice.

---

<sup>1</sup> Na potrzeby niniejszego opracowania utożsamiam te dwa pojęcia. Ściśle rzecz ujmując kategoria „projekt surowcowy” jest szersza od „projektu górniczego”. Jednak z punktu widzenia ryzyka takich projektów można te kategorie utożsamiać podążając za jednym i drugim nurtem pojawiającym się w literaturze.

Teza przyjęta w niniejszym artykule jest następująca: Analiza ryzyka projektu górniczego, rozumiana jako analiza zagrożeń tego projektu, może być skutecznie prowadzona przy użyciu metody Value at Risk (VaR), która daje odpowiedź na pytanie o prawdopodobieństwo uzyskania rezultatu gorszego nie tylko względem poziomu najbardziej prawdopodobnego, ale względem każdego innego poziomu odniesienia.

Przyjmując jako podstawowe dwie koncepcje szacowania ryzyka projektu inwestycyjnego w postaci prawdopodobieństwa nieuzyskania oczekiwanego poziomu aspiracji lub w postaci potencjalnej straty lub niższego od zakładanego poziomu dochodu, istotną kwestią jest sposób pomiaru tych wartości. W literaturze istnieje pokaźny dorobek metodyczny w zakresie szacowania ryzyka inwestycyjnego, rozpoczynając od najprostszych analiz scenariuszowych aż do różnorodnych rachunków symulacyjnych (najczęściej w postaci symulacji stochastycznej Monte Carlo). Jednocześnie można zauważyć brak w literaturze prób implementacji metody Value at Risk do oceny inwestycyjnych projektów rzeczowych.

Koncepcja VaR źródłowo jest przeznaczona do analizy ryzyka pojedynczego papieru wartościowego lub portfela tego typu walorów i odpowiada na pytanie, jaki jest potencjalny poziom straty przy zadanym poziomie ufności. Okazuje się jednak, że warstwa metodyczna tej metody jest na tyle uniwersalna, że warto podjąć próbę dostosowania tej metody do oceny rzeczowych projektów inwestycyjnych, a w szczególności projektów surowcowych (górnictw w szerokim rozumieniu tego słowa ze względu na złożony charakter ryzyka tych projektów).

Opracowanie przedstawia koncepcję implementacji tej metody, zwłaszcza w tych sytuacjach decyzyjnych, w których nie są znane rozkłady prawdopodobieństwa poszczególnych zmiennych. Każdorazowo chodzi o uzyskanie odpowiedzi na pytanie, jaka będzie wartość zagrożona projektu w warunkach realizacji poszczególnych jego scenariuszy. Gdyby przyjąć jako miarę wartości projektu najpopularniejszą spośród miar dyskontowych, czyli NPV, wówczas zachodzi podstawowa relacja o postaci:  $P(NPV \leq NPV_0 - VaR) = \alpha$ , gdzie  $\alpha$  jest zakładanym poziomem tolerancji, a  $NPV_0$  jest poziomem NPV oszacowanym na moment prowadzenia analizy ekonomicznej projektu.

## 1. Value at Risk – istota i metodyka

Można przyjąć, że początki nowoczesnej ery pomiaru i zarządzania ryzykiem zaczynają się w roku 1973 w momencie opublikowania modelu Blacka-Scholesa wyceny opcji finansowej, a następnie w roku 1979 wraz z pojawieniem się modelu Coxa-Rossa-Rubinsteina – również wyceny opcji, ale dla zmiennej dyskretnej. Wówczas pojawiło się nowe rozumienie kategorii ryzyka i nowe podejście do zarządzania ryzykiem.

Value at Risk można określić jako stratę wartości rynkowej projektu, której prawdopodobieństwo wystąpienia lub jej przekroczenia w zdefiniowanym przedziale czasowym jest równe założonemu poziomowi tolerancji. W literaturze związanej z omawianym problemem

pojawiają się także inne podejścia w zakresie zdefiniowania zagadnienia, jednak istota jest niezmienna. Przykładowo K. Jajuga (Jajuga 2000) zauważa, że VaR jest funkcją kwantyla rozkładu wartości inwestycji na końcu rozpatrywanego przedziału czasu. Jest tak, ponieważ kwantyl  $NPV_0$  rozkładu NPV odpowiada prawdopodobieństwu  $\alpha$ , według relacji pokazanej we wcześniejszej części tego artykułu. Dość ogólną definicję VaR przedstawia P. Best określając ją jako maksymalną kwotę, jaką można stracić w wyniku inwestycji w portfel o określonym horyzoncie czasowym i przy założonym poziomie ufności (Best 2000). Na podstawie tak zdefiniowanego modelu można stwierdzić, że rozmiary VaR zależą od dwóch istotnych parametrów, jakie należy określić przy stosowaniu tej metody, a są nimi:

1. Horyzont czasowy (nazywany okresem przetrzymania) – uwzględniający konkretny przedział czasu, w jakim przewidywana strata może zaistnieć. Jeżeli przedmiotem analizy jest rzeczowy projekt inwestycyjny, to horyzont czasowy jest określany w latach. Odmienne, dla inwestycji portfelowych czas liczony jest w dniach.
2. Poziom tolerancji (ufności) – określający z kolei zakładane prawdopodobieństwo z jakim strata może wystąpić. Dla projektu górniczego oznacza to, że metoda VaR jest ściśle związana z innymi metodami analizy ryzyka projektu. Warto w szczególności zastosować kombinację „analiza scenariuszowa-VaR”. Pierwsza z tych metod w tym układzie ma za zadanie oszacowanie prawdopodobieństwa straty, a sama metoda VaR szacuje poziom potencjalnej straty dla danego prawdopodobieństwa.

Można zatem stwierdzić, że VaR jest funkcją czasu i poziomu istotności rozumianego jako przyjęty poziom prawdopodobieństwa  $\alpha$ . Oznacza to, że istnieje  $(1 - \alpha)$  szans na to, że wartość ocenianego projektu odchyli się o mniej niż VaR tego projektu. W stosunku do poziomu istotności wielkość VaR występuje w zależności odwrotnie proporcjonalnej, gdyż im niższy poziom istotności, tym większa jest wielkość VaR. Zależność wprost proporcjonalną można zauważyć w przypadku zależności względem horyzontu czasowego. Im dłuższy horyzont czasowy, tym większa wartość VaR. W takim ujęciu zagadnień związanych z teoretycznymi kwestiami konstrukcji wartości narażonej na ryzyko można przedstawić formalny zapis VaR, który prezentuje się następująco (Jajuga i in. 2000):

$$P(W \leq W_0 - \text{VaR}) = \alpha$$

gdzie:

- $W_0$  – obecnie szacowana wartość projektu,
- $W$  – wartość projektu na końcu rozpatrywanego okresu (zmienna losowa),
- $\alpha$  – poziom tolerancji.

VaR jest także funkcją kwantyla rozkładu wartości. Kwantyl rozkładu wartości, który odpowiada danemu prawdopodobieństwu, zwanym także poziomem tolerancji można oznaczyć przez  $W_\alpha$ . W takiej sytuacji powyższy wzór ma postać:

$$P(W \leq W_\alpha) = \alpha$$

a co za tym idzie, otrzymujemy równość:

$$W_\alpha = W_0 - \text{VaR}$$

Często analiza ryzyka nie jest prowadzona tylko dla wartości, ale także dla stóp zwrotu. Jeśli kwantyl rozkładu stóp zwrotu odpowiadający zadanemu prawdopodobieństwu oznaczmy przez  $R_\alpha$ , wówczas otrzymamy:

$$P(R \leq R_\alpha) = \alpha$$

z kolei:

$$R_\alpha = \frac{W_\alpha - W_0}{W_0}$$

Wykorzystując metodę VaR w szacowaniu efektywności i opłacalności wszelkiego rodzaju inwestycji, jakie są podejmowane przez konkretny podmiot nie można jednoznacznie określić jedynej, najbardziej efektywnej metody oceny inwestycji z wykorzystaniem koncepcji wartości zagrożonej. Istnieje wiele sposobów, którymi można dokonywać kalkulacji wartości narażonej na ryzyko, każda z nich posiada swoją specyfikę i w celu uzyskania wyników kalkulacji zapewniających trafną ocenę konkretnej inwestycji zastosowanie tylko jednej z nich jest niewystarczające i niezbędne jest użycie kilku z nich tak, aby ich wyniki stanowiły podstawę do podjęcia trafnych decyzji. Wśród metod służących szacowaniu VaR można wyróżnić (Jajuga i in. 2000):

1. Podejście wariancji/kowariancji – zakłada, że rozkład stopy zwrotu projektu jest rozkładem normalnym. Ze względu na wątpliwości co do zasadności samego założenia normalności rozkładu podejście to powinno być stosowane nie tylko z ostrożnością, ale także z wykorzystaniem innych metod pomocniczych wspierających tę metodę.
2. Symulacja historyczna – podstawą tej metody jest sposób kształtowania się określonych danych w przeszłości. Analiza obejmuje wartości poszczególnych zmiennych z określonego przedziału czasowego z przeszłości. Na podstawie danych historycznych określa się rozkład historyczny stóp zwrotu, cen lub parametrów techniczno-geologicznych projektu. Kwantyl tego rozkładu pozwala na obliczenie konkretnej wartości VaR.
3. Symulacja Monte Carlo – podejście to polega na określeniu istotnych zmiennych dla projektu i oszacowaniu modelu, który miałby w najlepszy sposób opisywać mechanizm kształtowania się tych zmiennych, a poprzez to wartość projektu. Tak skonstruowany model powinien zostać poddany weryfikacji na wielu danych empirycznych. Wyznaczenie kwantyla tego rozkładu pozwala na bezpośrednie obliczenie VaR.
4. Analiza scenariuszy – podstawą tej metody jest określenie możliwych do zrealizowania scenariuszy kształtowania się wartości projektu. Scenariusze te mogą zakładać występowanie wartości mniej lub bardziej ekstremalnych a przyporządkowując poszczególnym

scenariuszom ich prawdopodobieństwo wystąpienia można otrzymać rozkład dyskretny tych wartości, co pozwala określić VaR. Analiza scenariuszy projektu surowcowego nie powinna ograniczać się do trzech podstawowych ujęć (wariant pesymistyczny, najbardziej prawdopodobny i wariant optymistyczny). Pomiedzy tymi sposobami ujmowania scenariuszy z jednej strony a symulacją stochastyczną Monte Carlo z drugiej strony istnieje szereg rozwiązań pośrednich, które stanowią istotę analizy scenariuszowej. Analiza ta nie powinna dotyczyć projektu jako całości, ale być analizą jego poszczególnych elementów, np. zmian warunków geologicznych, technicznych, zmian cen itd.

5. Podejście wyznaczania kwantyla dowolnego rozkładu – jest to bardziej ogólna postać podejścia wariancji/kowariancji, w którym VaR określa się na podstawie kwantyla dowolnego rozkładu. W celu wyznaczenia kwantyla rozkładu należy na podstawie danych historycznych oszacować parametry tego rozkładu.
6. Podejście oparte na teorii wartości ekstremalnych – jest to stosunkowo od niedawna wykorzystywane podejście, a prowadzi do określenia VaR w sposób pośredni. W podejściu tym zmierza się do określenia wartości ekstremalnej rozkładu, a więc do określenia maksymalnej straty.
7. Podejście oparte na wykorzystaniu wartości pochodzących z ogona rozkładu – we wszystkich metodach szacowania VaR do obliczeń wykorzystywane są wszystkie obserwacje. Jako, że VaR dotyczy zdarzeń ekstremalnych zasadnym, zatem będzie stosować głównie obserwacje, które swoje źródło mają w końcu „ogona” rozkładu. Należy jednak zwrócić uwagę na wynikającą z tego założenia pogarszającą się statystyczną jakość obliczeń z uwagi na małą liczbę dokonanych obserwacji.

## **2. Podejście wariancji/kowariancji w szacowaniu VaR projektu surowcowego**

W procedurze szacowania VaR należy zwrócić uwagę na konieczność dokonania pewnych założeń zmierzających do uproszczenia sposobu dalszej analizy koncepcji VaR. Przy liczeniu VaR z wykorzystaniem metody wariancji/kowariancji przyjmuje się bardzo istotne założenie, zgodnie z którym procentowe zmiany cen surowca będącego przedmiotem produkcji mają w przybliżeniu rozkład normalny. Ponieważ w rzeczowych projektach inwestycyjnych założenie to prawie nigdy nie jest spełnione, kalkulacja VaR przy tym założeniu może skutkować znacznym obniżeniem precyzji modeli wykorzystujących tę metodę. Zmiany ceny surowców nie charakteryzują się rozkładem normalnym, dlatego też lepiej jest posługując się tą metodą przyjąć rozkład normalny stopy zwrotu całego projektu, a nie jego poszczególnych składowych. Wówczas postulowana normalność rozkładu jest bardziej prawdopodobna.

Rozkład prawdopodobieństwa (funkcja gęstości prawdopodobieństwa) nazywa się rozkładem normalnym, jeżeli istnieje duże prawdopodobieństwo, że wynik będzie bliski wartości średniej i małe prawdopodobieństwo, że wynik będzie daleki od średniej. Można także zauważyć, że prawdopodobieństwo osiągnięcia wartości skrajnych jest nikłe, podczas gdy

prawdopodobieństwo osiągnięcia wartości bliskich średniej jest dość wysokie (Butler 2001). Warto dodać jednak, że takie ujęcie i sposób zdefiniowania oraz charakterystyki rozkładu normalnego jest niepełne i niewystarczające, aby tak określony rozkład uznać za rozkład normalny. Można bowiem skonstruować rozkład wypełniający doskonale dokonane powyżej założenia dotyczące ww. rozkładu, a jednocześnie nie będącym tymże. Takim rozkładem może być rozkład lewostronnie lub prawostronnie asymetryczny, w których to ponad połowa przeprowadzonych obserwacji przyjmuje wartości mniejsze (rozkład prawostronnie asymetryczny) lub większe (rozkład lewostronnie asymetryczny) od średniej arytmetycznej. Ważne jest, aby prawdopodobieństwo wystąpienia realizacji odbiegających od wartości średniej zarówno in plus jak in minus było sobie równe. Mając na uwadze powyższe należy stwierdzić, że rozkład można uznać za normalny, jeżeli funkcja gęstości prawdopodobieństwa tego rozkładu ma postać:

$$y = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\delta^2}}$$

Dla założenia  $\mu = 0$  i  $\delta = 1$  (zestandardyzowany rozkład normalny) powyższe równanie przyjmie kształt:

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Często spotykaną sytuacją w rozkładach zmian cen aktywów jest także występowanie „grubych ogonów”. Taki rozkład charakteryzuje się większą częstotliwością występowania ekstremalnych zjawisk, ruchów cen czy zmian wartości niż prawdziwy, klasyczny rozkład normalny. Im więcej sytuacji powodujących znaczące zmiany cen skutkujące występowaniem zjawiska „grubych ogonów”, tym więcej sytuacji, w których występuje możliwość narażenia się na wyższe niż normalne ryzyko. Z powyższego wynika, że metoda VaR jest narzędziem pomiaru doskonale sprawdzającym się w sytuacjach standardowych. Metoda ta jednak nie jest samodzielnym narzędziem pomiaru ryzyka, gdyż uniemożliwia dokładne zbadanie zmian ekstremalnych oraz ich wpływu na rozmiar ryzyka. W procesie modelowania różnorodnych procesów bądź zjawisk finansowych chcąc odzwierciedlić dokładnie istotę zjawiska nie zawsze istnieje możliwość szczegółowej analizy danego procesu.

Pojawia się potrzeba stworzenia modelu, który będzie przedstawiał dane zjawisko z możliwie największą precyzją i z przyjętymi założeniami pozwalającymi opisać je tak, aby określał jak najbardziej dokładnie jego istotę. Kalkulacja VaR także wymaga stworzenia modelu oraz dokonania pewnych założeń co do jego funkcjonowania.

W przypadku projektów rzeczowych założenie o normalności rozkładu jest jeszcze mocniejsze niż w przypadku inwestycji finansowych. Dla projektów górniczych trudność może być dwójakiego rodzaju:

- a) rozkład analizowanej zmiennej jest rozkładem normalnym, ale często występuje zjawisko „grubych ogonów”,  
 b) rozkład zmiennej jest inny niż normalny.

Występowanie takich zjawisk oznacza, że VaR samodzielnie nie może być wystarczającym narzędziem służącym pomiarowi ryzyka. To ogranicza, ale nie wyklucza możliwości stosowania VaR. Trzeba jednak poszerzyć tę metodę o dodatkową procedurę w postaci „testu napięć”. Testowanie napięć bada potencjalną stratę projektu, wykorzystując wiele możliwych do wystąpienia scenariuszy zmiany cen. Dzięki tej metodzie można dokonywać analizy zjawisk dość rzadko występujących, które nie znajdują się wprost w zakresie badania metody VaR. Uwzględniając powyższe ograniczenia oraz sposoby ich pokonywania można wyliczyć poziom wartości zagrożonej wykorzystując podejście wariancji/kowariancji.

Algorytm ten jest jednym z najbardziej popularnych algorytmów stosowanych do obliczania wartości VaR. W celu wyznaczenia wartości zagrożonej przy użyciu tej metody należy wykonać kilka kroków. Pierwszym etapem jest wyznaczenie macierzy wariancji stóp zwrotu  $R$ , ich macierzy korelacji  $\Theta$  oraz określenie wektora wag  $V$ . Należy dodać, że w przypadku projektu rzeczowego wagi oznaczają wpływ poszczególnych elementów na wartość całego projektu. Kolejnym krokiem jest obliczenie macierzy wariancji – kowariancji  $X$  zgodnie ze wzorem:

$$X = R\Theta R^T$$

gdzie:

- $R$  – macierz wariancji stóp zwrotu,
- $\Theta$  – macierz korelacji stóp zwrotu,
- $R^T$  – transponowana macierz  $R$ .

Następnym krokiem jest obliczenie wariancji zgodnie ze wzorem:

$$S = VXV^T$$

gdzie:

- $V$  – wektor wag, czyli udziału procentowego lub wartościowego instrumentu w portfelu,
- $X$  – macierz wariancji obliczona według poprzedniego wzoru,
- $V^T$  – transponowany wektor  $V$ .

Po zastosowaniu powyższych kroków przyjętych przy obliczaniu wartości zagrożonej VaR z wykorzystaniem metody wariancji – kowariancji można otrzymać przybliżoną wartość VaR portfela przy zadanym poziomie tolerancji (np. 95%) i czasie  $t$  zgodnie z formułą:

$$\text{VaR} = \sqrt{k \cdot S \cdot t}$$

gdzie:

- $k$  – stała, zależna od prawdopodobieństwa, np. gdy  $1 - \alpha = 0,95$ ,  $k$  wynosi 1,65; zaś dla  $1 - \alpha = 0,99$ ,  $k$  wynosi 2,33. Wartości stałej  $k$  są wartościami pochodzącymi z tablic statystycznych,
- $t$  – czas,
- $S$  – wariancja.

### 3. Symulacja historyczna

Z przedstawionej powyżej analizy wynika, że metoda wariancji – kowariancji posiada wiele zalet, takich jak łatwość i szybkość dokonywanych obliczeń wykorzystywanych w stosowaniu tej metody. Jednak posługuje się założeniami ograniczającymi możliwości jej zastosowania oraz powodujące nieprecyzyjność i zniekształcenie otrzymywanych wyników, co przejawia się w przyjęciu założenia o normalności rozkładu cen surowca czy stóp zwrotu projektu. Założenie to jest zasadne i precyzyjne jednak nie dla wszystkich rodzajów instrumentów na rynku, wynika to także z faktu, że podejście to jest modelem i jak każdy model nie jest w stanie dokładnie odzwierciedlać rzeczywistości. W algorytmie podejścia symulacji historycznej obliczane są zmiany wartości całego projektu wykorzystując historyczne wartości oraz ich wpływ na wartość inwestycji. Można wyróżnić dwa podejścia stosowane w obliczaniu VaR za pomocą algorytmu symulacji historycznej:

- podejście parametryczne,
- podejście nieparametryczne.

W podejściu parametrycznym wykorzystuje się założenie o tym, że rozkład stóp zwrotu ma charakter normalny. Znając rozkład stóp zwrotu oraz prawdopodobieństwo jego wystąpienia dla określonego poziomu ufności można wyznaczyć rozmiary VaR. Stosując jednak podejście nieparametryczne proces szacowania wartości VaR można znów podzielić na dwa etapy.

Pierwszy etap polega na uporządkowaniu stóp zwrotu rosnąco, a drugi etap to wyznaczenie VaR dla zadanego poziomu tolerancji. Symulacja historyczna jest algorytmem obliczania VaR, który znacznie lepiej i dokładniej przedstawia i odzwierciedla badaną rzeczywistość i procesy zachodzące na rynku niż metoda wariancji – kowariancji, co w znacznym stopniu decyduje o atrakcyjności zastosowania tej metody. W procesie obliczania wielkości zagrożonej metodą symulacji historycznej dokonuje się porównania wartości projektu pomiędzy dwoma momentami, pierwszym z nich jest jego aktualna wartość, a drugi moment określony jest jako dane z przeszłości. Dane te wykorzystywane są do wielokrotnej rewaluacji z zastosowaniem różnych wysokości cen z różnych momentów z przeszłości. Wykorzystując dane z przeszłości w każdym momencie projekt osiąga różną wartość całkowitą, a w wyniku tejże rewaluacji projekt osiąga różny poziom zysków i strat, które będą podstawą do obliczenia rozmiarów VaR zakładając określony poziom ufności (Best 2000). Należy także zwrócić uwagę na to, że wynika z tego słabość tej metody



przejawiająca się w konieczności zastosowania bardzo wielu obliczeń w celu uzyskania wyniku kalkulacji. Wada ta zdecydowanie utrudnia obliczenia w sytuacjach, gdy na projekt składa się wiele różnorodnych składników i wykorzystywane są długie szeregi zmian cen historycznych. Warto także zwrócić uwagę na fakt, że w sytuacji, gdy są rozpatrywane dwie wartości projektu – bieżąca i przeszła, procentowe zmiany cen odnoszą się tylko do jego pierwotnej, wyjściowej wartości. W praktyce metodologia ta ma zastosowanie poprzez postępowanie według określonych kroków (Best 2000):

1. Pierwszym etapem jest uzyskanie szeregu procentowych zmian cen dla każdego czynnika, będącego źródłem ryzyka niezbędnym do określenia wartości projektu.
2. Następnie należy zastosować uzyskane wcześniej zmiany cen do badanego projektu w celu uzyskania historycznego ciągu zmian wartości całej inwestycji.
3. Uzyskane wyniki należy uporządkować rosnąco.
4. Ostatnim etapem w procesie kalkulacji wartości zagrożonej jest wyznaczenie percentyla odpowiadającego zadanemu poziomowi ufności – efekt tego etapu pozwala uzyskać wielkość VaR.

Skonstruowanie określonego szeregu cen historycznych powinno być rozpatrywane także przy uwzględnieniu jednocześnie dwóch istotnych kwestii związanych z budowaniem takiego szeregu. Pierwszą z nich jest określenie odpowiedniej długości szeregu czasowego przyjętego do analizy. Wybór odpowiedniego horyzontu jest najistotniejszym zagadnieniem, które należy przeanalizować podczas zastosowania symulacji historycznej i określić właściwą długość szeregu czasowego. Dokonywanie obliczeń przy zastosowaniu tej metody szacowania VaR przy posługiwaniu się danymi pochodzącymi z mniejszej ilości podokresów może powodować błędne określenie VaR, jednak zbyt długi okres przyjętej analizy skutkuje z kolei nadmiernie dużą pracochłonnością.

Kolejną istotną kwestią budzącą wątpliwości przy konstruowaniu szeregów czasowych jest sposób ich konstrukcji dla tych zmiennych, dla których z przyczyn naturalnych nie istnieje możliwość określenia ich historycznych zmian. Wynikające z tego faktu trudności obliczeniowe mogą zostać złagodzone poprzez zastąpienie szeregów czasowych tych aktywów szeregami czasowymi aktywów posiadających cechy podobne do czasu.

#### **4. Symulacja Monte Carlo w szacowaniu VaR**

Obliczanie VaR za pomocą metody symulacji stochastycznej należy traktować jako zastosowanie najdoskonalszej analizy scenariuszowej do oceny projektu, przy czym atrybut doskonałości nie dotyczy samej metody (niestety) ale istoty symulacji, która jest istotnie wielokrotną symulacją historyczną.

Projekty surowcowe wielokrotnie były oceniane metodą Monte Carlo. Różnica w tym przypadku polega na tym, że w dotychczasowym stosowaniu w rezultacie otrzymywano rozkład prawdopodobieństwa poziomu szacowanego efektu np. rozkład prawdopodobień-

stwa wartości NPV, w tym przypadku akcent kładzie się na poziomy ufności i odpowiadające im potencjalne straty.

Symulacja Monte Carlo pozwala pokonać ograniczenia wynikające ze specyfiki symulacji historycznej. Proces obliczania wartości zagrożonej VaR metodą symulacji Monte Carlo można podzielić na trzy główne etapy postępowania:

1. Generowanie poszczególnych scenariuszy ryzyka.
2. Sporządzenie wyceny projektu dla określonego scenariusza.
3. Kalkulacja wartości VaR dla wybranego scenariusza.

Zakres analizy symulacji Monte Carlo obejmuje duże zestawienia sztucznie generowanych zdarzeń lub cen aktywów, będące podstawą do kalkulacji VaR. Liczba zdarzeń tworzona jest na podstawie liczb losowych, a następnie tak stworzone zdarzenia wprowadzane są jako składowe modelu, który staje się podstawą do obliczenia VaR. Warto także zwrócić uwagę na fakt, że sposób szacowania VaR metodą symulacji Monte Carlo jest oparty na sporządzaniu symulacji zmian cen aktywów i to jest istotą tej metody. Opiera się ona na liczbach losowych generowanych w sposób przypadkowy. Zdarzenia wygenerowane przez taką symulację na podstawie tych liczb charakteryzują się losowością, a w związku z tym nie można stwierdzić z całą pewnością, że zdarzenia niezbędne do otrzymania precyzyjnego wyniku wielkości VaR zostały rzeczywiście wygenerowane. Jednak problem ten może zostać wyeliminowany, jeżeli dokonamy założenia, że korzystamy z dużej liczby zdarzeń.

W literaturze poza wyżej przedstawionymi etapami obliczania VaR można wyróżnić także nieco bardziej dokładny sposób postępowania przy kalkulacji potencjalnych strat:

1. Określenie zmienności oraz korelacji dla poszczególnych czynników ryzyka.
2. Stworzenie szeregów cen z prawidłowymi współczynnikami zmienności i korelacji dla czynników ryzyka.
3. Obliczenie wartości własnych oraz wektorów własnych macierzy korelacji.
4. Utworzenie skorelowanych szeregów cen.
5. Wygenerowanie zmian portfela i uporządkowanie ich w sposób tożsamy z metodą symulacji historycznej (Best 2000).

Pierwszy etap, jaki należy podjąć przy obliczaniu VaR tą metodą jest w znacznym stopniu tożsamy jak dla metody wariancji – kowariancji i podobnie jak w poprzedniej metodzie tak i w symulacji Monte Carlo obliczyć należy współczynniki zmienności oraz korelacji dla każdego czynnika ryzyka. Często może jednak zdarzyć się sytuacja, kiedy nie ma możliwości oszacowania tych współczynników. W takich sytuacjach powinny być one oszacowane poprzez wykorzystywanie informacji mających zastosowanie dla podobnych zmiennych. Kolejną czynnością jaką należy wykonać jest tworzenie szeregów cen, a proces ten można podzielić na dwa kroki. Pierwszym z nich jest generowanie dla poszczególnych aktywów zestawu różnorodnych zmian cen, a w procesie tym należy wykorzystać założenie o normalności rozkładu oraz zastosować odpowiednie współczynniki zmienności. Tworzenie tak określonego szeregu zmian cen dla poszczególnych składników sprowadza się do wygenerowania liczb losowych, a następnie przekształcenia tych danych w zestaw zmian cen charakteryzujących się rozkładem normalnym. Wygenerowane liczby losowe powinny

uwzględniać współczynniki zmienności i korelacji charakterystyczne dla danego składnika aktywów. Liczby te zawarte w przedziale  $[0,1]$  pozwalają na przyjęcie kolejnego założenia, które stanowi, że wygenerowane liczby są punktami dystrybuanty rozkładu normalnego, co oznacza, że każda liczba losowa reprezentuje skumulowane prawdopodobieństwo dla rozkładu normalnego. Następnie liczby losowe są przekształcane w rozkład normalny przy użyciu funkcji odwrotnej dystrybuanty dla każdej realizacji (liczby). Wykorzystując funkcję odwrotną dystrybuanty zakładamy rozkład normalny standaryzowany o wartości oczekiwanej równej zero i odchyleniu standardowym równym jeden. Znając wygenerowane zmienne stosowane w procesie symulacji Monte Carlo należy także uwzględnić korelacje pomiędzy poszczególnymi zmiennymi. W literaturze można odnaleźć różne sposoby temu służące. Najbardziej efektywnym jest tzw. dekompozycja Cholesky'ego (Mackiewicz 2002), będącą operacją algebraiczną przeprowadzaną na macierzy korelacji, a dekompozycja ta pozwala na przekształcenie macierzy kwadratowej w trójkątną. Macierz trójkątna charakteryzuje się tym, że wszystkie jej składniki znajdujące się powyżej lub poniżej głównej przekątnej są równe 0. Macierz korelacji  $A$  dla dwóch zmiennych przedstawiona poniżej:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$$

gdzie:

$\rho$  – korelacja pomiędzy pierwszym a drugim instrumentem.

Natomiast macierz  $A$  po dekompozycji Cholesky'ego wygląda następująco:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix}$$

Znając tak określoną macierz korelacji dwóch zmiennych oraz macierz po dokonanej dekompozycji Cholesky'ego, aby uzyskać zmienne skorelowane ze sobą należy dokonać pomnożenia macierzy  $A$  przez wektor kolumnowy, składający się z dwóch niezależnych liczb wybranych losowo z określonego wcześniej rozkładu. W wyniku takiego działania powstaje wektor kolumnowy składający się z dwóch liczb o korelacji równej  $\rho$ , co formalnie ma postać:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 \\ \rho n_1 + \sqrt{1-\rho^2} n_2 \end{bmatrix}$$

gdzie:

$n_1, n_2$  – niezależne liczby wybrane z badanego rozkładu,

$\rho$  – współczynnik korelacji.

Drugim krokiem jest tworzenie skorelowanych zmian cen aktywów, do czego posłużyć mogą tzw. wektory własne i wartości własne. Należy zwrócić uwagę na fakt, że wyniki uzyskane w efekcie zastosowania kalkulacji VaR metodą Monte Carlo będą podobne do otrzymanych w wyniku zastosowania metody wariancji – kowariancji. Jednak liczby losowe wykorzystywane w symulacji historycznej przyjmują różne wartości podczas każdej kolejnej symulacji, co skutkuje tym, że wartość VaR za każdym razem osiąga różne poziomy. Właściwość ta przysparza trudności w określeniu odpowiedniego szacunku wartości zagrożonej. Rozwiązaniem tych trudności może być zastosowanie dużej liczby zdarzeń, gdyż przy małej ilości zdarzeń mogą występować błędy kalkulacji i otrzymana VaR może być niedoszacowana lub przeszacowana w stosunku do rzeczywistej VaR otrzymanej np. w wyniku metody wariancji – kowariancji, którą można przyjąć za podstawę odniesienia. Aby osiągnąć wystarczającą precyzję dokonywanych obliczeń należy badać zbieżność wyników poprzez wielokrotne przeprowadzanie symulacji. Warto natomiast zauważyć pewną właściwość zgodnie z którą, poprawa zbieżności jest proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego z wielokrotności wykonanych obserwacji zmian, a zatem czterokrotne zwiększenie liczby przebiegów (obserwacji) poprawi zbieżność o 2.

Następnym etapem postępowania w stosowaniu symulacji Monte Carlo jest sporządzenie wektorów własnych i wartości własnych. Wektory własne służą opisywaniu jak zmiany cen grupy czynników ryzyka „przesuwają się”, zmieniają w stosunku do siebie. Natomiast wartości własne przypisują odpowiednią wagę każdemu wektorowi własnemu. Charakterystyczną cechą macierzy korelacji dla krzywej dochodowości jest to, że korelacje w pobliżu przekątnej są bardzo wysokie i zmniejszają się wraz z oddalaniem się od przekątnej. W praktyce jednak zdarza się, że macierze korelacji mogą generować ujemne wartości własne, co świadczy o tym, że macierz korelacji jest wadliwa lub sprzeczna. Tak powstałe macierze skutkują błędnymi wynikami VaR, a zatem należy je uprzednio tak przekształcić, aby mogły być wykorzystane do utworzenia szeregu zmian cen. Na podstawie zdefiniowanych wektorów własnych i wartości własnych można przedstawić równanie służące do otrzymania skorelowanych losowych zmian parametrów, które jest tworzone dla każdego elementu w następujący sposób (Best 2000):

$$x_k = \sum_{i=1}^Z \sqrt{\lambda_i} \cdot x^*_k \cdot v_{ki} \cdot \sigma_k$$

gdzie:

- $x_k$  – skorelowana losowa zmiana elementu  $k$  o rozkładzie normalnym i współczynniku zmienności dla tego elementu,
- $\sqrt{\lambda_i}$  – pierwiastek kwadratowy wartości własnej dla  $i$ -tego elementu,
- $x^*_k$  – zmiana losowa z szeregu o rozkładzie normalnym,
- $v_{ki}$  –  $k$ -ty element wektora własnego dla  $i$ -tego elementu,
- $\sigma_k$  – współczynnik zmienności  $k$ -tego elementu.

Aby jednak wyznaczyć wektory własne i wartości własne należy wykonać kilka czynności. Wartości własne można otrzymać rozwiązując poniższe równanie dla macierzy korelacji 1 (Best 2000):

$$|(A - \lambda \cdot I_n)| = 0$$

gdzie:

- A – macierz korelacji (macierz o wymiarach  $n \times n$ ),
- $\lambda$  – macierz wartości własnej,
- $I_n$  – macierz jednostkowa (macierz o wymiarach  $n \times n$ ).

W wyniku działań dokonanych w określony powyżej sposób macierz o wymiarach  $n \times n$  będzie zawierać  $n$  wartości własnych, jedną dla każdej zmiennej projektu inwestycyjnego. Natomiast obliczenia wektorów własnych można dokonać poprzez znalezienie rozwiązań układu równań równoległych oznaczonych jako:

$$(A - \lambda_i \cdot I) \cdot v_i = 0$$

gdzie:

- $v_i$  – wektor własny wartości własnej  $i$  instrumentu  $i$ .

Macierze korelacji mogą tworzyć ujemne wartości własne, jest to wówczas sygnał, że macierz ta jest wadliwie skonstruowana lub sprzeczna. Przyczyną powstawania takich macierzy są błędne pomiary korelacji. Aby macierz korelacji była skonstruowana prawidłowo musi być określona dodatnio, co oznacza, że:

$$V \cdot C \cdot V^T \geq 0$$

gdzie:

- V – wektor wierszowy wartości VaR dla każdej indywidualnej pozycji,
- C – macierz korelacji,
- $V^T$  – wektor V transponowany (kolumnowy).

W poprzednich fragmentach artykułu wskazano na to, że liczby losowe są przekształcane w rozkład normalny przy użyciu funkcji odwrotnej dystrybuanty dla każdej realizacji. Poniżej przedstawiono sposób estymacji dystrybuanty rozkładu normalnego, który zaprezentować można następująco (Best 2000):

Dla  $x \geq 0$ :

$$N(x) = 1 - N'(x)(ak + bk^2 + ck^3)$$

Dla  $x \leq 0$ :

$$N(x) = 1 - N(-x)$$

gdzie:

$N(x)$  – wartość dystrybuanty dla  $x$ ,

$N'(x) = 1/\sqrt{2\pi} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$  – jest funkcją gęstości standardowego rozkładu normalnego.

### 5. Wady i zalety metod kalkulacji wartości zagrożonej

Koncepcja wartości narażonej na ryzyko jest skuteczną metodą szacowania ryzyka, potencjalnych strat, jakie mogą wystąpić w trakcie działalności prowadzonej przez inwestorów. Każdy jednak model oraz metody mające na celu kalkulację i ocenę rozmiarów możliwych do poniesienia strat nie jest idealnym odzwierciedleniem rzeczywistości ukształtowanej na rynku, a co się z tym wiąże nie jest wolny od wad i ograniczeń. Poza zaletami poszczególnych metod przemawiającymi za ich zastosowaniem w praktyce, metody te także zawierają w swojej konstrukcji wady, które mogą również w znacznym stopniu powodować spadek atrakcyjności danej metody w jej wykorzystywaniu. Poniżej przedstawiono zalety i wady sposobu kalkulacji VaR dla oceny racjonalności i efektywności podejmowanych przez inwestora działań i inwestycji. Do podstawowych zalet należy zaliczyć:

1. Uniwersalność – jest to podstawowa zaleta metod w oparciu, o które dokonujemy kalkulacji VaR. Ta sama koncepcja pomiaru ryzyka może być wykorzystywana z powodzeniem właściwie dla wszystkich aktywów, jakimi dysponuje podmiot i przyjmuje ona szeroki zakres zastosowania, jednak nie ogranicza się tylko do stosowania w stosunku do jednego rodzaju ryzyka, ale może mieć także zastosowanie w różnych aspektach ryzyka. W każdej sytuacji czy określonym zakresie ryzyka wykorzystuje się różne techniki kalkulacji wartości zagrożonej, jednak otrzymany wynik, jakim jest określenie rozmiarów ryzyka zostaje wyrażone w sposób jednolity. Ta właściwość przedstawionej metody daje możliwość wzajemnego porównywania uzyskanych wyników kalkulacji z różnymi metodami, co także wpływa na szeroki zakres zastosowanie metodyki VaR.
2. Możliwość określenia prawdopodobieństwa – możliwość oszacowania rozmiarów strat jest ważna, ale istotne jest także określenie prawdopodobieństwa, z jakim ta strata może zaistnieć. Klasyczne miary ryzyka, takie jak zmienność czy wrażliwość są niepełnowartościowe pod tym względem, gdyż poza określeniem zmian wartości danego czynnika ryzyka nie są w swojej konstrukcji zdolne do określenia dodatkowego parametru, którym jest prawdopodobieństwo, z jakim ta zmiana powinna wystąpić.
3. Łatwość interpretacji – metody kalkulacji VaR są przystępne w interpretacji, a wyniki otrzymane przy ich zastosowaniu są określoną wartością liczbową wyrażającą rozmiar maksymalnych możliwych do poniesienia strat wyrażony w jednostkach pieniężnych

przy określonym poziomie prawdopodobieństwa. Może być stosowana do zabezpieczenia kapitałowego instytucji – w związku z tym, że szacowanie wielkości narażonej na ryzyko metodą VaR pozwala określić rozmiary strat, a instytucja będąca w posiadaniu takich informacji jest wówczas w stanie określić, na jakim poziomie należy przygotować zabezpieczenie swojej działalności na poniesienie tychże strat. Uzyskane wyniki pozwalają dostosować rozmiary i sposób zabezpieczenia odpowiedni do zaistniałej sytuacji.

4. Popularność – charakterystyka tej metody przejawiająca się także w uniwersalności jej przyczyniła się do wzrostu popularności tej metody, o czym świadczy szeroki zakres instytucji opierających swoje analizy dotyczące ryzyka na metodologii VaR.

Poza wymienionymi korzyściami jasno wynikającymi z charakterystyki i szerokiego zastosowania metody kalkulacji wartości zagrożonej jak każdy model posiada także w swej konstrukcji wady, które można określić w następującej postaci:

1. Założenie o „normalności” zachowań rynku powoduje nierzadko trudności zastosowania tej metody w dowolnej sytuacji rynkowej. Założenie to w swojej istocie opiera się na takich sytuacjach rynkowych, w których zmiany mają charakter stały niewykraczający poza standardowe zachowania rynku. Tak skonstruowane założenie z istoty wyklucza możliwość reakcji i analizy przy użyciu tej metody sytuacji ekstremalnych, pojawiających się rzadko i wykraczających poza przyjętą normę. Skutkuje to tym, że możliwość zastosowania tej metody w takich warunkach staje się czasami ograniczona.
2. Nie określa jak duże mogą być rozmiary strat, jeśli VaR zostanie przekroczona – metoda kalkulacji VaR pozwala określić rozmiary strat z danym prawdopodobieństwem ich wystąpienia, jednak nie precyzuje jak duże mogą wystąpić straty w sytuacji, gdy ich poziom przekroczy uzyskany wynik. Sytuacja ta rodzi kolejne trudności w określeniu ryzyka, które związane będzie z oszacowaniem strat przez podmiot, gdy ich poziom przekroczy wstępnie uzyskany wynik. Brak informacji na ten temat, gdy rozmiar ryzyka ponad znany jego poziom może powodować awersję w stosunku do stosowania metod VaR w bieżącej działalności.
3. Trudności w dokładnym oszacowaniu – metoda ta nie dostarcza informacji o dużym stopniu precyzyjności, a każdy wynik uzyskany w wyniku użycia metody kalkulacji VaR jest oszacowany. Każdy wynik będący szacunkiem ze swojej istoty nie jest dokładny, a jest jedynie przybliżeniem przyszłej rzeczywistości w zakresie analizowanego projektu. Akceptacje uzyskanego wyniku można określić poprzez zdefiniowanie określonego poziomu tolerancji, założenia akceptacji pewnego poziomu ryzyka i wkalkulowaniem go w swoją działalność i podejmowane decyzje.
4. Wrażliwość wyników na metodę estymacji – precyzja dokonywanych oszacowań i kalkulacja wyników i ich dokładność zależy także od rodzaju zastosowanej metody estymacji. Ta cecha metod VaR przyczynia się do zwrócenia szczególnej uwagi na kwestię wyboru konkretnej metody estymacji do danej sytuacji, która jest przedmiotem analizy. Dokonanie błędnego wyboru może skutkować otrzymaniem błędnego wyniku, jego złej interpretacji, a w konsekwencji także podjęciem błędnej decyzji powodującej

poniesienie wyższych niż planowane strat. Z tego względu dokonanie właściwego wyboru staje się kluczową kwestią w procesie pomiaru wartości zagrożonej.

Podsumowując zarówno zalety, jak i wady prezentowanej metody należy stwierdzić, że cały aparat metodyczny może być zastosowany do oceny projektów surowcowych. Okazuje się, że z punktu widzenia ryzyka inwestycji złożone projekty inwestycyjne są w swej konstrukcji podobne do portfela aktywów finansowych. Należy równocześnie pamiętać, że nawet najbardziej wysublimowane metody nie wyeliminują ryzyka – nie jest to też ich zadaniem. Metody te jedynie ryzyko kwantyfikują. Decyzja inwestycyjna jest złożonym procesem a metoda VaR jest jedynie wspomagającym tę decyzję narzędziem.

#### LITERATURA

- Best P., 2000 – Wartość narażona na ryzyko: obliczanie i wdrażanie modelu VAR. Kraków, Oficyna Ekonomiczna Dom Wydawniczy ABC.
- Butler C., 2001 – Tajniki Value At Risk: praktyczny podręcznik zastosowań metody VAR. Warszawa, wyd. Liber.
- Jajuga K., Kuziak K., Papla D., 2000 – Ryzyko rynkowe polskiego rynku akcji – Value at Risk i inne metody pomiaru [w:] Rynek kapitałowy: skuteczne inwestowanie część I. Wyd. Uniwersytet Szczeciński.
- Jajuga K., 2000 – Miary ryzyka rynkowego – część trzecia, „Rynek Terminowy” nr 8.
- Mackiewicz A., 2002 – Algorytmy algebry liniowej. Metody bezpośrednie, Poznań, Wyd. Politechniki Poznańskiej.
- Saługa P., 2006 – Wycena górniczych projektów inwestycyjnych w aspekcie doboru stopy dyskontowej. Kraków, Wydawnictwo IGSMiE PAN.

#### KONCEPCJA VaR (VALUE AT RISK) W POMIARZE RYZYKA SUROWCOWEGO PROJEKTU INWESTYCYJNEGO

##### Słowa kluczowe

Inwestycje, ryzyko, wartość narażona na ryzyko

##### Streszczenie

Przyjmując jako podstawowe dwie koncepcje szacowania ryzyka projektu inwestycyjnego w postaci prawdopodobieństwa niezyskania oczekiwanego poziomu aspiracji lub w postaci potencjalnej straty lub niższego od zakładanego poziomu dochodu, istotną kwestią jest sposób pomiaru tych wartości. Referat koncentruje się na ryzyku projektu inwestycyjnego rozumianym jako zagrożenie i dotyczy drugiej z wymienionych powyżej koncepcji szacowania ryzyka.

Koncepcja VaR źródłowo jest przeznaczona do analizy ryzyka pojedynczego papieru wartościowego lub portfela tego typu walorów i odpowiada na pytanie jaki jest potencjalny poziom straty przy zadanym poziomie ufności. Okazuje się jednak, że warstwa metodyczna tej koncepcji jest na tyle uniwersalna, że warto podjąć próbę dostosowania tej metody do oceny rzeczowych projektów inwestycyjnych a w szczególności projektów surowcowych.

Referat przedstawia koncepcję tej metody, zwłaszcza w tych sytuacjach decyzyjnych, w których nie są znane rozkłady prawdopodobieństwa poszczególnych zmiennych. W szczególności chodzi o dwa podejścia: oparte o wyznaczenie kwantyla dowolnego rozkładu jako uogólniona postać podejścia wariancji/kowariancji oraz podejście oparte na teorii wartości ekstremalnych.



Każdorazowo chodzi o uzyskanie odpowiedzi na pytanie jaka będzie wartość zagrożona projektu, w warunkach realizacji poszczególnych jego scenariuszy. Projekty górnicze cechują się dużym ryzykiem o wielowymiarowym charakterze, dlatego zastosowanie miar zagregowanych wydaje się być konieczne a koncepcja VaR może być skutecznym narzędziem pomiaru ryzyka.

#### APPLICATION OF VaR CONCEPT IN RISK ASSESSMENT OF A MINERAL INVESTMENT PROJECT

##### Key words

Investment, Risk, Value at Risk

##### Abstract

In considering as fundamental two concepts of investment project risk assessment as a probability of not achieved expected level of aspiration or as a potential loss or lower than expected level of income, there is an essential question of how these values are measured. The article focuses on the risk of investment project seen as a threat and deals with the second concept of risk assessment mentioned above.

The VaR concept analyses the risk of a security or its portfolio and answers the question of what the potential level of loss at a given confidence level is. It shows however that the methodological approach of this concept is universal enough to take a chance of applying this method to assess real investment projects and in particular mining projects.

The article provides the concept of implementation of this method, especially in decision making situations where the probability distributions of variables are unknown. In particular, there are two approaches: based on the assignment of a quantile of any decomposition as a generalized form of approach of variance/covariance and the approach based on extreme value theory.

In every case there is an answer to be found: what will be the endangered value of the project under implementation conditions of particular scenarios. Mine projects are great risk projects of multidimensional character; therefore an application of aggregated measures seems to be necessary and the VaR concept might be a sufficient tool of risk measurement.

