

INSTYTUT GOSPODARKI SUROWCAMI MINERALNYMI I ENERGIA,  
POLSKIEJ AKADEMII NAUK — KRAKÓW

---

STUDIA, ROZPRAWY, MONOGRAFIE **182**

Tomasz Niedoba

WIELOWYMIAROWE CHARAKTERYSTYKI ZMIENNYCH  
LOSOWYCH W OPISIE MATERIAŁÓW UZIARNIONYCH  
I PROCESÓW ICH ROZDZIAŁU

WYDAWNICTWO INSTYTUTU GOSPODARKI SUROWCAMI MINERALNYMI  
I ENERGIA PAN • KRAKÓW • 2013

#### KOMITET REDAKCYJNY

prof. dr hab. inż. Eugeniusz Mokrzycki (redaktor naczelny serii)  
dr hab. inż. Lidia Gawlik (sekretarz redakcji), prof. IGSMiE PAN  
dr hab. inż. Zenon Pilecki, prof. IGSMiE PAN  
dr hab. inż. Wojciech Suwała, prof. IGSMiE PAN  
dr hab. inż. Alicja Uliasz-Bocheńczyk, prof. AGH

#### RECENZENCI

dr hab. inż. Kazimierz Trybalski, prof. nadzw.  
dr hab. inż. Joachim Pielot, prof. nadzw.

*Monografia powstała w ramach realizacji projektu naukowego nr N N524 339040,  
nr umowy 3390/B/T02/2011/40*

#### AUTOR

dr inż. Tomasz Niedoba  
AGH Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

#### ADRES REDAKCJI

31-261 Kraków, ul. Józefa Wybickiego 7  
tel. 12-632-33-00, fax 12-632-35-24

#### OPRACOWANIE EDYTORSKIE:

mgr Danuta Nikiel-Wroczyńska, Beata Stankiewicz,  
Barbara Sudoł, Monika Goebel

© *Copyright by Autor*

© *Copyright by Instytut Gospodarki Surowcami Mineralnymi i Energią PAN – Wydawnictwo*

Printed in Poland

Kraków 2013

ISSN 1895-6823

ISBN 978-83-62922-25-3

## Spis treści

1. Wprowadzenie .....	5
1.1. Uwagi o formalizacji opisu procesów materiałów uziarnionych w przeróbce surowców mineralnych .....	5
1.2. Cele i zakres pracy .....	7
2. Probabilistyczne modele procesów rozdziału surowców mineralnych .....	10
2.1. Probabilistyczny model procesów rozdziału – powierzchnia rozdziału .....	10
2.2. Krzywe i powierzchnie wzbogacalności .....	12
2.2.1. Aproksymacja krzywych wzbogacalności Henry’ego .....	13
2.2.2. Zespół powierzchni wzbogacalności .....	15
2.3. Analiza właściwości materiałów uziarnionych – krzywe i powierzchnie rozkładu .....	19
2.3.1. Podstawy teoretyczne nieklasycznych metod statystycznych .....	22
2.4. Metoda krigingu .....	30
2.4.1. Podstawy teoretyczne metody krigingu zwyczajnego .....	31
2.4.2. Kriging w badaniach rozkładów cech materiałów uziarnionych .....	34
3. Zastosowania praktyczne probabilistycznych modeli teoretycznych .....	37
3.1. Aproksymacja krzywych wzbogacalności Henry’ego .....	37
3.2. Ocena zawartości popiołu w węglu za pomocą nieparametrycznych metod statystycznych .....	44
3.3. Aproksymacja krzywych składu ziarnowego za pomocą bayesowskich estymatorów parametrów w rozkładzie Weibulla .....	49
3.4. Wielowymiarowa analiza właściwości materiałów uziarnionych .....	55
3.4.1. Dystrybuanty rozkładów dwuwymiarowych zmiennych losowych .....	57
3.4.2. Zastosowanie nieparametrycznych metod statystycznych .....	61
3.5. Rozkłady warunkowe .....	64
3.5.1. Określenie funkcji gęstości dla zmiennych losowych B i C przy zastosowaniu metod jądrowych .....	69
3.5.2. Relacja regresyjna pomiędzy zmiennymi losowymi B, C i gęstością P .....	72
3.5.3. Aproksymacja tradycyjna .....	73
3.5.4. Aproksymacja metodą Fouriera .....	73
3.6. Zastosowanie krigingu w analizie materiałów uziarnionych .....	76
3.6.1. Analiza wielowymiarowa charakterystyk węgla z użyciem metody krigingu ...	76
3.6.2. Zawartość popiołu w węglu w zależności od wielkości ziarna $D$ i jego gęstości $P$ – wariogram łączony .....	81
3.6.3. Zawartość popiołu i siarki – wariogram dwuwymiarowy .....	85

3.6.4. Zawartość siarki i części lotnych – wariogram potęgowy .....	89
4. Metody wizualizacji wielowymiarowych charakterystyk materiałów uziarnionych .....	94
4.1. Metoda tuneli obserwacyjnych .....	95
4.2. Procedura rysowania .....	97
4.3. Wizualizacja siedmiowymiarowych danych .....	98
4.4. Wizualizacja siedmiowymiarowych danych dla węgla z podziałem na klasy ziarnowe	101
Podsumowanie .....	113
Załącznik .....	117
Literatura .....	127
Wielowymiarowe charakterystyki zmiennych losowych w opisie materiałów uziarnionych i procesów ich rozdziału – Streszczenie .....	140
Multidimensional characteristics of random variables in description of grained materials and their separation processes – Abstract .....	142

## 1. Wprowadzenie

### 1.1. Uwagi o formalizacji opisu procesów materiałów uziarnionych w przeróbce surowców mineralnych

Przeróbka surowców mineralnych (mineralurgia) jest dziedziną nauk empirycznych, zajmującą się zagadnieniami związanymi z procesami przetwórczymi tychże surowców (według określonych kryteriów) w celu nadania im określonych właściwości. Praktycznie wszystkie procesy przeróbcze sprowadzają się do rozdziału materiałów uziarnionych (pod wpływem określonych sił rozdzielających) na dwa lub więcej produktów, które różnią się od materiału wyjściowego ilościowo lub jakościowo pod względem przynajmniej jednej cechy (np. wielkości ziarna, gęstości, właściwości magnetycznych, elektrycznych itd.).

Do opisu procesów przeróbczych i właściwości materiałów uziarnionych stosuje się osiągnięcia (język, prawa) wielu nauk podstawowych, takich jak:

- fizyka – do badań i opisu większości procesów przeróbczych (rozdrabnianie, fizyczne metody wzbogacania, klasyfikacja itp.);
- chemia – dla procesów flotacji i metod chemicznego wzbogacania;
- biologia – dla biologicznych metod wzbogacania;
- geologia i mineralogia – do charakterystyki minerałów i skał;
- matematyka – dla wszystkich procesów do opisu zarówno właściwości materiałów uziarnionych, jak i praw rozdziału.

Jak z tego wynika, w badaniach przeróbki surowców mineralnych – zarówno teoretycznych, jak i empirycznych – stosuje się język oraz prawa nauk podstawowych. Nie znaczy to jednak, że dziedzina nauki związana z przeróbką nie zawiera pojęć oraz praw i metod badawczych związanych wyłącznie z nią i będących tym samym częścią główną wiedzy na temat stosowanej metodologii w tej dziedzinie nauki (np. wychód, uzysk, zawartość składników, miary efektywności procesów, krzywe wzbogalności, czy krzywe rozdziału).

Jak każda teoria empiryczna, przeróbka surowców mineralnych ulega przeobrażeniom wraz z upływem czasu. Problemy przeróbcze towarzyszyły człowiekowi już w erze kamienia łupanego (ociosywanie i sortowanie krzemieni). Na przełomie XIV i XV wieku istniały urządzenia separujące. Agrikoła (1494–1555) przedstawił na jednej z rycin separator strumieniowy (Drzymała 2001). Natomiast pierwsze opisy procesu wzbogacania ziaren w pulsującym strumieniu wody pochodzą z 1556 roku (Marx i in. 1999).

Za początek rozwoju teorii procesów przeróbczych uznaje się prace Rittingera (Rittinger 1867). Jednak znaczny jej rozwój nastąpił w ciągu ostatniego stulecia, a zwłaszcza w drugiej jego połowie. Postęp wiedzy z zakresu tej teorii jest dokumentowany szeroką literaturą. Do podstawowych prac zaliczyć można prace Henry'ego, Terry (1939), Trompa (1937), Gy (1972), Grumbrechta (1952), Heidenreicha (1962), Tichonowa (1984), Lyncha (1977), Mayera (1964; 1967), a także: Budryk 1947, 1948; Bodziony 1960, 1965; Kraj 1967a, b; Pudło, Szczepańska 1976; Sztaba 1956, 1987; Nawrocki 1976; Tumidajski 1992, 1993, 1996; Tumidajski, Siwiec 1984; Tumidajski, Wieniewski 1988.

Burzliwy rozwój i szerokie zastosowanie przeróbki surowców mineralnych spowodowały, że stała się ona obszerną dziedziną nauki, co spowodowało liczne próby uogólnień opisu i usystematyzowania tej teorii (Drzymała 2001).

Różne podejścia do metodologii opisu doprowadziły, między innymi, do wykształcenia się odrębnych języków. Innym czynnikiem, który miał wpływ na różnicowanie terminologii jest fakt, że istnieją trzy podejścia do podziału rodzajów procesów przeróbczych.

W niektórych pracach wyraźnie dzieli się je na:

- Klasyfikację – podział na frakcje o określonych właściwościach, np. wielkość ziarna, gęstość itp.
- Wzbogacanie – rozdział ziaren na produkty różniące się zawartością wybranego składnika nadawy, wielkość ziaren (teoretycznie) nie ulega zmianie.
- Procesy podziału na części składowe.

Procesom klasyfikacji i wzbogacania zawsze towarzyszy rozdział na produkty. Natomiast proces podziału na części składowe może nie uwzględniać właściwości materiału (np. pobór próbek).

W monografii (Drzymała 2001) podjęto udaną próbę ujednoczenia teorii procesów przeróbczych. Wszystkie potraktowano jako procesy separacji, a do ich opisu, analizy i oceny zastosowano tylko trzy parametry: wychód, uzysk, zawartość oraz cechę materiału, według której nastąpił podział.

Elementem tej teorii jest próba zdefiniowania struktury procesów separacji za pomocą podstawowych składowych, czyli: opisu, analizy i oceny.

Inną próbę logicznej rekonstrukcji tej teorii, sprowadzającą się w dużym stopniu do uporządkowania i ujednoczenia języka opisu procesów przeróbczych i właściwości materiałów podlegających rozdziałowi na bazie rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej, przedstawiono w pracy (Tumidajski 1997). Autor przyjął, że podstawowymi, charakterystycznymi dla przeróbki surowców mineralnych są problemy opisu właściwości materiałów uziarnionych (nadawy i produktów) oraz praw ich rozdziału. Według niego kluczowe równanie, opisujące dowolny proces rozdziału ma postać

$$g(x) = (1-\gamma)h(x) + \gamma \int_D p(w,x)f(w)dw \quad (1.1)$$

- gdzie:  $h(x)$  – funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa cechy  $X$  dla części materiału nie podlegającego rozdziałowi,  
 $g(x)$  – funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa cechy  $X$  dla materiału, który stanowił nadawę,  
 $p(w,x)$  – prawdopodobieństwo przejścia z frakcji  $(w, w+dw)$  do produktu  $(x, x+dx)$ ,  
 $f(w)$  – funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa określająca skład materiału ze względu na cechę  $W$ ,  
 $D$  – przedział zmienności cechy  $W$ .

Równaniem tym można opisać każdy proces rozdziału, zadając odpowiednią funkcję  $p(w,x)$  oraz przedział  $D$  zmienności cechy  $W$ .

Reasumując, przeróbkę surowców mineralnych można próbować zaliczyć do teorii empirycznych (Wójcicki 1974), charakteryzujących się tym, że mają one:

- określony język teorii,
- zbiór zdań zaakceptowanych jako prawa teorii,
- ogół środków dowodowych na gruncie danej teorii,
- właściwe dla danej teorii procedury pomiarowe i diagnostyczne;
- zasięg teorii, tj. zbiór wszystkich systemów empirycznych, które dana teoria opisuje.

## 1.2. Cele i zakres pracy

Prezentowana praca została zaplanowana jako kontynuacja i rozwinięcie problemów formalizacji opisu procesów i materiałów występujących w przeróbce surowców mineralnych traktowanej jako teoria empiryczna. Podstawowym punktem wyjścia jest przyjęcie, że materiał uziarniony (surowiec mineralny lub jego produkty) jest charakteryzowany wielowymiarową zmienną losową (wektorem losowym)  $W = [W_1, W_2, \dots, W_n]$ . Przyjęcie losowości właściwości materiałów jest dokładnym odzwierciedleniem rzeczywistości, a przyjęcie wielowymiarowości w opisie pociąga za sobą określone konsekwencje, będące przedmiotem pracy.

Surowce mineralne, które podlegają wzbogacaniu w celu ich lepszego wykorzystania mogą być (charakteryzują się) charakteryzowane wieloma wskaźnikami opisującymi ich, interesujące przeróbkarza, cechy. Podstawowymi cechami są wielkość ziaren oraz ich gęstość, które decydują o przebiegu rozdziału zbiorów ziaren (nadaw) i efektach takiego rozdziału. Rozdział prowadzi się z reguły w celu uzyskania produktów o zróżnicowanych wartościach średnich wybranej cechy, która zwykle charakteryzowana jest zawartością określonego składnika surowca wyznaczoną na drodze analiz chemicznych. Takie podejście do surowca mineralnego prowadzi do potraktowania go jako wielowymiarowego wektora  $X = [X_1, \dots, X_n]$ . Zasadniczym problemem jest także wybór poszczególnych jednostek populacji generalnej (pojedyncze ziarno, jednostka objętości lub masy), co może decydować

o kierunkach charakteryzowania wielowymiarowych powiązań cech wektora  $X$ . Takimi kierunkami charakteryzowania mogą być:

- wielowymiarowe rozkłady wektora losowego  $X$  wraz ze wszystkimi konsekwencjami metody;
- wielowymiarowe równania regresji wraz z analizą macierzy współczynników korelacji liniowej oraz korelacji cząstkowej;
- analiza czynnikowa;
- inne metody, w tym wizualizacja metodą tuneli obserwacyjnych, osi równoległych oraz wizualizacja zależności pomiędzy wielowymiarowymi bryłami.

Wielowymiarowe rozkłady wektora  $X$  traktowanego jako wektor losowy, mają już swoją bogatą literaturę i praktyczne ich zastosowanie, co zostanie szeroko omówione w przedstawionej monografii. Pozostałe metody są ze sobą w pewien sposób powiązane; to zostanie także omówione.

Macierze współczynników korelacji liniowej i współczynników korelacji cząstkowej są związane, z reguły, z istniejącymi modelami liniowymi zależności występujących między badanymi zmiennymi wektora  $X$ . Współczynniki korelacji liniowej są wyznaczane dla par zmiennych losowych całkowicie niezależnie od pozostałych zmiennych. Natomiast przy wyznaczaniu współczynników korelacji cząstkowej uwzględnia się rolę pozostałych zmiennych w rozważanym równaniu regresji liniowej. W przypadku analizy trzech zmiennych losowych, z których jedna jest traktowana jako zmienna zależna, a dwie pozostałe jako niezależne, sprowadza się to do wyznaczania współczynników korelacji dla punktów rzutowanych na ściany układu współrzędnych równoległe do płaszczyzny regresji. Pozwala to wyznaczyć hierarchię (siłę wpływu) zależności zmiennych w rozpatrywanym układzie. Na analizie macierzy współczynników korelacji liniowej oparta jest analiza czynnikowa, która pozwala pogrupować występujące zmienne w tzw. czynniki, które reprezentują połączone wpływy zmiennych na rezultaty rozpatrywanych procesów, czyli przeprowadzić pewną klasyfikację zmiennych.

Można więc stwierdzić, że głównymi celami pracy będą:

- kontynuacja rekonstrukcji i rozbudowy teorii empirycznej, jaką jest przeróbka surowców mineralnych w oparciu o wielowymiarowe charakterystyki materiałów uziarnionych oraz szeroko rozumianych procesów ich rozdziału;
- zademonstrowanie zdolności aplikacyjnych użytych metod wielowymiarowego opisu procesów i ich produktów do ich poszerzonej analizy i interpretacji zgodnej z naturą teorii.

Praca składa się, oprócz wprowadzenia i zakończenia, z trzech rozdziałów głównych. W rozdziale drugim przedstawiono teoretyczne założenia dotyczące różnych typów modeli probabilistycznych, które można stosować w przeróbce surowców mineralnych. Przedstawiono możliwości aproksymacji krzywych, jak również powierzchni wzbogacalności i wzbogacania, przy zastosowaniu m. in. technik Morgensterna, jak również założenia teoretyczne dotyczące metody krigingu – metody stosowanej głównie w tzw. geostatystyce.



Przedstawiono również zasady stosowalności tzw. nieklasycznych metod statystycznych do analizy, zarówno jedno- jak i wielowymiarowej, charakterystyk materiałów uziarnionych, wśród których wymienić należy metody nieparametryczne, tj. metody jądrowe, metodę Fouriera oraz rozkłady warunkowe, wliczając w to zastosowanie tzw. metod bayesowskich.

W rozdziale trzecim omówiono zastosowanie praktyczne metod zaprezentowanych w rozdziale drugim. Przedstawiono m. in. aproksymację krzywych i powierzchni wzbogacalności oraz rozkłady wielowymiarowe charakterystyk materiału uziarnionego na przykładzie węgla. W tym celu zastosowano różne metody statystyczne, włączając w to metody bayesowskie oraz aproksymację nieparametryczną. Ponadto przedstawiono wykorzystanie metody krigingu do interpolacji wartości wybranych parametrów opisowych na przykładzie charakterystyk węgla, stosując różnego typu funkcje wariogramu. Tego typu aplikacja metody krigingu jest nieznana w dotychczasowych jej zastosowaniach.

Rozdział czwarty poświęcony jest wizualizacji wielowymiarowych danych. Zaprezentowano i omówiono zasady metody tuneli obserwacyjnych, którą następnie zastosowano dla danych dotyczących trzech typów węgla. Na podstawie tej metody stwierdzono, że dokładna charakterystyka materiału uziarnionego umożliwia identyfikację źródła jego pochodzenia i daje szansę na wyodrębnienie różnic pomiędzy materiałami, które nie są widoczne przy zastosowaniu tradycyjnych metod.

Całość pracy zakończono podsumowaniem, które zawiera główne wnioski płynące z pracy i odnosi się do każdej z metod, zastosowanej w niniejszym opracowaniu.

## 2. Probabilistyczne modele procesów rozdziału surowców mineralnych

Procesy rozdziału nie są do końca poznane, mimo stosunkowo szybkiego rozwoju dziedziny nauki zajmującej się nimi. Obecnie nie istnieje także sposób całościowego, jednolitego opisu takich procesów. Jednym z coraz częściej stosowanych sposobów jest podejście probabilistyczne. Uzasadnia je losowa natura materiałów poddawanych separacji, jak również losowe zachowanie się ziaren materiału podczas procesu. Można więc przyjąć, że zarówno przebieg procesu rozdziału, jak i jego wynik zależy od wpływu wielu losowych cech (fizycznych, fizykochemicznych, geometrycznych itp.) materiału poddawanego procesowi, jak również w pewnej mierze od cech urządzeń separujących i warunków ich pracy, czyli od wektora losowego tych cech.

Generalnie, procesy separacji polegają na rozdziale materiału na produkty różniące się rozkładami wielu cech charakteryzujących materiał uziarniony poddawany procesowi. Przykładowo, w procesach rozdrabniania zmienia się wielkość ziarna (zawartość składników i frakcji nie ulega zmianie), natomiast w procesach wzbogacania i klasyfikacji wielkość ziarna (teoretycznie) pozostaje taka sama, zmienia się natomiast zawartość składników (wzbogacanie) lub zawartość kolejnych frakcji (klasyfikacja).

Podstawowym prawem stosowanym przy modelowaniu procesu rozdziału jest prawo zachowania masy, występujące w postaci równania bilansu (wzór 1.1).

### 2.1. Probabilistyczny model procesów rozdziału – powierzchnia rozdziału

Jeżeli o rozdziale decyduje jedna cecha  $W$  (np. wielkość ziarna, jego gęstość, zawartość składnika, hydrofobowość, właściwości magnetyczne, cechy elektryczne, zdolność do adhezji itp.), wówczas równanie bilansu ma postać (Tumidajski 1997):

$$\int_D p(w,x)f(w)dw = g(x) \quad (2.1)$$

gdzie:  $f(w)$  – funkcja gęstości rozkładu cechy  $W$  w materiale uziarnionym przed zajęciem procesu,

$p(w,x)$  – prawdopodobieństwo przejścia ziarna (lub jego fragmentu) z frakcji  $(w, w+dw)$  nadawy do frakcji  $(x, x+dx)$  produktu,

$g(x)$  – funkcja gęstości rozkładu cechy  $X$  w produkcji,  
 $D = [w_{\min}, w_{\max}]$ .

Korzystając z tego równania wyprowadzono wzory na funkcje rozdziału (Tumidajski 1997).

W rzeczywistych procesach separacji następuje rozdział na co najwyżej kilka produktów, co odpowiada podziałowi obszaru zmienności wielkości cechy  $X$  na kilka podprzedziałów. Każdemu z nich można przyporządkować liczbę  $b_j$  (będącą np. numerem podprzedziału, czy też wartością średnią podprzedziału itp.). Wówczas  $p(w, b_j)$  będzie oznaczać prawdopodobieństwo przejścia ziarna o wartości cechy  $W$  do  $j$ -tego produktu.

Odpowiednik krzywej rozdziału dla  $j$ -tego produktu ma postać

$$p(w, b_j) = \gamma_j \frac{f_j(w)}{f(w)} \quad (2.2)$$

gdzie:  $f_j(w)$  – gęstość rozkładu cechy  $W$  w  $j$ -tym produkcie ( $j=1, 2, \dots, n$ ),  
 $f(w)$  – gęstość rozkładu cechy  $W$  w nadawie,  
 $\gamma_j$  – wychód  $j$ -tego produktu.

Prawdopodobieństwa  $p(w, b_j)$  określone wzorem (2.2) są równoważne klasycznym funkcjom rozdziału (Drzymała 2001; Stepiński 1964; Sztaba 1956; Terra 1939; Tichonow 1984).

W przypadku rozdziału na dwa produkty, równanie

$$y_j = \gamma_j \frac{f_j(w)}{f(w)}, j = 1, 2 \quad (2.3)$$

jest równaniem krzywej rozdziału.

Równanie (2.3) nie traci ważności również po uwzględnieniu kilku cech ziarna (tj. np. rozmiar ziarna, gęstość, właściwości magnetyczne) (Tumidajski 1997).

Wówczas mamy do czynienia z wektorem losowym cech ziarna  $W = (W_1, W_2, \dots, W_k)$ .

Natomiast wzór (2.4) o postaci

$$y_j = \gamma_j \frac{f_j(w_1, \dots, w_k)}{f(w_1, \dots, w_k)}, j = 1, 2 \quad (2.4)$$

gdzie:  $f_j(w_1, \dots, w_k)$  – gęstość rozkładu wektora losowego  $W$  w  $j$ -tym produkcie,  
 $f(w_1, \dots, w_k)$  – gęstość rozkładu wektora losowego  $W$  w nadawie,  
określa powierzchnię rozdziału ( $k=2$ ) lub hiperpowierzchnię rozdziału ( $k>2$ ).

Ze względów praktycznych najbardziej interesująca jest zależność funkcji rozdziału od gęstości i rozmiaru ziarna, czyli powierzchnia rozdziału ( $k = 2$ ).

Zatem dla wyznaczenia powierzchni rozdziału wystarczy określić funkcje gęstości rozkładu prawdopodobieństwa wektora losowego  $(D, P)$ , odpowiednio  $f(d, \rho)$  – dla nadawy;  $f_j(d, \rho)$  – dla produktów.

W przypadku, gdy  $k = 2$  do zagadnienia powierzchni rozdziału można również podejść inaczej. Skoro materiał uziarniony w pierwszym etapie obróbki podlega rozdziałowi (ze względu na wielkość ziarna) na klasy ziarnowe, a następnie każda klasa podlega rozdziałowi na frakcje gęstościowe, to dla każdej klasy ziarnowej można utworzyć krzywą rozdziału, a następnie zbiór tych krzywych utworzy powierzchnię rozdziału.

Dla opisu tej powierzchni (o ile krzywe rozdziału będą należeć do tej samej klasy funkcji) wystarczy znaleźć zależność współczynników funkcji opisujących te krzywe od wielkości ziarna.

## 2.2. Krzywe i powierzchnie wzbogalności

Materiał wyjściowy, stanowiący mieszaninę ziaren o różnej zawartości interesujących użytkownika składników (minerałów użytecznych w przypadku rudy, czy popiołu, siarki, fosforu, części lotnych itp. w przypadku węgla) w procesie wzbogacania ulega rozdziałowi na kilka frakcji, od najuboższych (koncentrat w przypadku węgla, odpady w przypadku rud) do najbogatszych (odpady w przypadku węgla, koncentrat w przypadku rud) w dany składnik.

Już od początku XX wieku badano zawartość popiołu w węglu (w jego frakcjach ciężarowych) i wykreślano krzywe będące zależnościami pomiędzy gęstością, wychodem i zawartością popiołu – zwane krzywymi wzbogalności (Barskij, Kozin 1978; Blaschke S. 1972; Blaschke W. 2009; Budryk 1947; Drzymała 2001; Heidenreich 1954; Kotkin i in. 1982; Kozak, Cagaś 1965; Krukowiecki 1971; Laskowski i in. 1977; Pawłowicz i in. 1966; Sokołow 1962; Stępiński 1964; Sztaba i in. 2003; Weiss 1985).

Każdy proces wzbogacania jest ściśle związany ze wzbogalnością materiału poddawane go temu procesowi, co z kolei jest uzależnione od stopnia uwolnienia ziaren minerałów. Takie uwalnianie dokonuje się przez rozdrabnianie materiału do wielkości ziaren, dla której otrzymany produkt jest mieszaniną względnie wolnych cząstek minerału użytecznego i minerałów skały płonnej (Tumidajski 2012). Mimo, że głębszy przemiał prowadzi do wyższego stopnia uwolnienia to efekty wzbogacania mogą okazać się gorsze i dlatego dokonuje się oceny wzbogalności materiału poddawane go procesowi wzbogacania. Do takiej oceny stosuje się, między innymi, krzywą wzbogalności Henry'ego, będącą – w przypadku węgla – zależnością pomiędzy wychodem i zawartością popiołu ( $\lambda = \lambda(\gamma)$ ), wykreślaną na podstawie wyników analiz densymetrycznych badanego materiału (Drzymała 2001; Gawlik i in. 2004; Róg 2009; Krawczykowski i in. 2012). Jak wynika z powyższych rozważań, charakter takiej krzywej jest uzależniony od stopnia uwolnienia ziaren, a w konsekwencji od

ich wielkości. Dlatego w badaniach wzbogacalności wydaje się istotnym uwzględnienie wielkości ziaren. W kolejnych podrozdziałach przedstawiono aproksymacje krzywej wzbogacalności Henry'ego  $\lambda = \lambda(\rho)$  i  $\lambda = \lambda(\gamma)$  oraz powierzchni wzbogacalności  $\lambda = \lambda(d, \rho)$  i pewne efekty ich zastosowania.

Podstawowa krzywa wzbogacalności może być wykreślona dla dowolnego parametru jakościowego węgla. W pracach (Róg 2009, 2011) wykreślono podstawowe krzywe wzbogacalności dla węgla na zawartość chloru, fosforu, siarki całkowitej, siarki pirytovej, mikrolitotypów wityrinowych, części lotnych, stężenia izotopów, jak również dla parametrów służących do oceny właściwości koksowniczych koncentratów węgla kamiennych, tj. wskaźnik wolnego wydymania SI, zdolności spiekania RI i dylatacji  $b$ .

Z probabilistycznego punktu widzenia, jeżeli badana jest zmiana koncentracji składnika  $W$  (cechy  $W$ ) w produktach i o rozdziale materiału uziarnionego decyduje jedna cecha  $X$ , to funkcja regresji pierwszego rodzaju

$$E(W|X = x) = \lambda(x)$$

określa krzywą wzbogacalności Henry'ego (Tumidajski 1997).

### 2.2.1. Aproksymacja krzywych wzbogacalności Henry'ego

W przeszłości miały miejsce nieliczne próby aproksymacji krzywych wzbogacalności Henry'ego (Pudło 1971; Brożek 1996). W pracy Pudły (Pudło 1977) autor wykorzystał empiryczne zależności pomiędzy zawartością składnika (badanego) w koncentracie i odpadach oraz jego uzyskiem w koncentracie. Metoda ta prowadzi do równania hiperboli drugiego stopnia, w którym występują parametry makroskopowe charakteryzujące daną próbę. W pracy Brożka przedstawiono analityczną postać równania, zawierającą wszystkie parametry makroskopowe i mikroskopowe charakteryzujące próbę wzbogacanego materiału. Praca autora niniejszej monografii zawiera natomiast dwa podejścia probabilistyczne.

Podczas realizacji pracy przyjęto następujące założenia i zasady opisu:

1. Całość badanego materiału rozdzielono na  $k$  frakcji, ze względu na gęstość ziaren. Przyjęto, że  $\gamma_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) oznacza procentowy udział  $i$ -tej frakcji w całości materiału.
2. Przez  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) oznaczono procentową zawartość popiołu w  $i$ -tej frakcji.
3. Jako podstawową krzywą stosowaną przy opisie procesu wzbogacania przyjęto krzywą Henry'ego  $\lambda = \lambda(\gamma)$ , gdzie  $\lambda$  oznacza zawartość popiołu we frakcji, której udział procentowy wynosi  $\gamma$ .

Przy takich założeniach otrzymuje się, że średnia zawartość popiołu w badanym materiale wynosi (Stępiński 1964; Tumidajski 1997)

$$\alpha = \int_0^{100} \lambda(\gamma) d\gamma \quad (2.5)$$

Jeżeli ustali się, że  $\gamma_0$  oznacza wychód koncentratu, a  $(100 - \gamma_0)$  wychód odpadów, to otrzymuje się, że średnia zawartość popiołu  $\vartheta$  w koncentracie wynosi

$$\vartheta = \frac{1}{\gamma_0} \int_0^{\gamma_0} \lambda(\gamma) d\gamma \quad (2.6)$$

Natomiast średnia zawartość popiołu  $\beta$  w odpadach zadana jest wzorem

$$\beta = \frac{1}{100 - \gamma_0} \int_{\gamma_0}^{100} \lambda(\gamma) d\gamma \quad (2.7)$$

Przyjęto, że zależność procentowej zawartości popiołu w materiale od jego gęstości przedstawia funkcja  $\lambda_0 = \lambda_0(\rho)$ , oraz że funkcja  $\gamma = F(\rho)$  przedstawia zależność wychodu frakcji od jej gęstości. Ponieważ funkcja  $F(\gamma)$  jest funkcją rosnącą, więc posiada funkcję odwrotną  $\rho = F^{-1}(\gamma)$ . Wobec tego krzywa wzbogacalności Henry'ego przyjmuje postać

$$\lambda = \lambda_0(F^{-1}(\gamma)) \quad (2.8)$$

Funkcję  $F(\rho)$  zazwyczaj aproksymuje się za pomocą funkcji opisujących dystrybuanty rozkładów zmiennych losowych (Dobosz 2001). W przeróbce najczęściej stosowanymi dystrybuantami rozkładów są:

— rozkład Weibulla (zwany również rozkładem RRB):  $F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^b}$  (2.9a)

— rozkład Weibulla cenzurowany:  $F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{a(x_0-x)}\right)^b}$  (2.9b)

— rozkład logistyczny:  $F(x) = \frac{1}{1 + be^{-cx}}$  (2.9c)

— rozkład logistyczny cenzurowany:  $F(x) = \frac{1}{1 + be^{\left(\frac{-cx}{x_0-x}\right)}}$  (2.9d)

— rozkład logarytmiczno-normalny:  $F(x) = \Phi\left(\frac{\ln x - m}{\sigma}\right)$  (2.9e)

— rozkład GSA:  $F(x) = hx^\alpha$  (2.9f)

gdzie:  $a, b, c, f, g, h, \alpha$  – parametry rozkładów,  
 $\Phi(\cdot)$  – dystrybuanta rozkładu normalnego  $N(0, 1)$ .

Funkcję  $\lambda_0(\rho)$  wyznaczono jako krzywą regresji drugiego rodzaju dla zależności zawartości popiołu  $\lambda$  od gęstości materiału  $\rho$ .

### 2.2.2. Zespół powierzchni wzbogalności

Materiał stanowiący nadawę do zakładu przerobczego jest charakteryzowany wielowymiarowym wektorem właściwości, takich jak np. w przypadku węgla:

- wielkość ziarna,
- gęstość ziarna,
- zawartość popiołu,
- zawartość innych składników,
- wskaźnik wolnego wydymania,
- zdolność spiekania itp.

Zatem podstawą projektowania zakładów przygotowania materiału do wzbogacania oraz układów jego wzbogacania powinna być wielowymiarowa analiza właściwości tego materiału. Do tego celu mogą posłużyć powierzchnie (hiperpowierzchnie) wzbogalności.

Jeżeli badana jest zmiana koncentracji składnika  $W$  (np. zawartości popiołu, siarki, części lotnych itp.) w produktach, przy założeniu, że o rozdziale materiału decydują dwie cechy, np. wielkość ziarna i jego gęstość, czyli wektor losowy  $(D, P)$ , wówczas dwuwymiarowa regresja pierwszego rodzaju

$$E(E|D = d, P = \rho) = \lambda(d, \rho) \quad (2.10)$$

jest odpowiednikiem krzywej wzbogalności Henry'ego (Tumidajski 1997). Z kolei mając dany rozkład wektora losowego  $(D, P, W)$ , tzn. znana jest funkcja gęstości tego rozkładu  $g(d, \rho, w)$ , wówczas wzór (2.10) można zapisać w postaci

$$\lambda(d, \rho) = \frac{\int_{W_{\min}}^{W_{\max}} wg(d, \rho, w)dw}{f(d, \rho)} \quad (2.11)$$

gdzie  $f(d, \rho)$  – funkcja gęstości rozkładu wektora losowego  $(D, P)$ .

Jeżeli następuje rozdział materiału na dwa produkty ze względu na dwie cechy w dwóch kolejnych procesach (np. przesiewanie, a następnie wzbogacanie w cieczach ciężkich) i granicami rozdziału są półproste  $d = \hat{d}$  i  $\rho = \hat{\rho}$ , to wartości przeciętne składnika  $W$  w całym materiale (nadawie) i w produktach (w koncentracie i odpadzie), jak również uzysk i straty składnika  $W$  w odpadach wyrażają się wzorami (Tumidajski 1997):

- w nadawie:

$$\alpha = \int \int_D \lambda(d, \rho) f(d, \rho) d d d \rho \quad (2.12)$$

— w koncentracji:

$$\vartheta(\hat{d}, \hat{\rho}) = \frac{\int \int_{D_1} \lambda(d, \rho) f(d, \rho) d d d \rho}{\int \int_{D_1} f(d, \rho) d d d \rho} \quad (2.13)$$

— w odpadach:

$$\beta(\hat{d}, \hat{\rho}) = \frac{\int \int_{D_2} \lambda(d, \rho) f(d, \rho) d d d \rho}{1 - \int \int_{D_1} f(d, \rho) d d d \rho} \quad (2.14)$$

— uzysk:

$$\varepsilon(\hat{d}, \hat{\rho}) = \frac{\int \int_{D_2} \lambda(d, \rho) f(d, \rho) d d d \rho}{\int \int_D \lambda(d, \rho) f(d, \rho) d d d \rho} \quad (2.15)$$

— straty:

$$\eta(\hat{d}, \hat{\rho}) = \frac{\int \int_{D_1} \lambda(d, \rho) f(d, \rho) d d d \rho}{\int \int_D \lambda(d, \rho) f(d, \rho) d d d \rho} \quad (2.16)$$

gdzie:  $D = [d_{\min}, d_{\max}] \times [\rho_{\min}, \rho_{\max}]$ ;  $D_1 = [d_{\min}, \hat{d}] \times [\rho_{\min}, \hat{\rho}]$ ;  $D_2 = D \setminus D_1$ .

Warto zauważyć, że jeżeli  $G(d, \rho, w)$  jest dystrybuantą wektora losowego  $(D, P, W)$ , to gęstość rozkładu tego wektora wyraża się wzorem:

$$g(d, \rho, w) = \frac{\partial^3 G}{\partial d \partial \rho \partial w} \quad (2.17a)$$

Analogicznie, jeśli  $F(d, \rho)$  jest dystrybuantą wektora losowego  $(D, P)$ , to gęstość jego rozkładu ma postać

$$f(d, \rho) = \frac{\partial^2 F}{\partial d \partial \rho} \quad (2.17b)$$

Zatem, aby określić funkcję  $\lambda(d, \rho)$  wystarczy wyznaczyć dystrybuanty  $G(d, \rho, w)$  oraz  $F(d, \rho)$ .



Jednym ze sposobów aproksymacji funkcji wyżej wymienionych dystrybuant jest zastosowanie wielowymiarowych rozkładów Morgensterna (Kotz i in. 2000; Niedoba 2011, 2013). Rozkład Morgensterna dla wektora  $(D, P, W)$  ma postać:

$$G(d, \rho, w) = F_1(d)F_2(\rho)F_3(w)[1 + \alpha_{12}(1 - F_1(d))(1 - F_2(\rho)) + \alpha_{13}(1 - F_1(d))(1 - F_3(w)) + \alpha_{23}(1 - F_2(\rho))(1 - F_3(w))] \quad (2.18)$$

Natomiast dla wektora losowego  $(D, P)$  dystrybuanta przedstawia się następująco

$$F(d, \rho) = F_1(d)F_2(\rho)[1 + \alpha(1 - F_1(d))(1 - F_2(\rho))] \quad (2.19)$$

gdzie:  $F_1(d)$  – dystrybuanta zmiennej losowej  $D$ ,  
 $F_2(\rho)$  – dystrybuanta zmiennej losowej  $P$ ,  
 $F_3(w)$  – dystrybuanta zmiennej losowej  $W$ ,  
współczynniki  $\alpha, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{23}$  spełniają warunki  $|\alpha| \leq 1, |\alpha_{ij}| \leq 1, i = 1, 2; j = 2, 3$ .

W niektórych przypadkach można zastosować aproksymację Farlie-Gumbela-Morgensterna (Kotz i in. 2000). Według tej metody dystrybuanta wektora  $(D, P)$  ma postać

$$F(d, \rho) = F_1(d)F_2(\rho)[1 + \alpha \cdot g_1(d)g_2(\rho)] \quad (2.20)$$

gdzie  $g_1(d), g_2(\rho)$  – funkcje spełniające warunki  $g_1(d) \in [0, 1], g_2(\rho) \in [0, 1]$   
 $\alpha$  – dobrany parametr z przedziału  $[-1, 1]$ .

Dla aproksymacji funkcji  $F(d, \rho)$  można również zastosować rozkład dwuwymiarowy logistyczny (Tumidajski 1997) o postaci

$$F(d, \rho) = [1 + a_1 e^{-b_1 d} + a_2 e^{-b_2 \rho}]^{-1}, \text{ gdzie } a_1, a_2, b_1, b_2 > 0 \quad (2.21)$$

lub dwuwymiarowy rozkład Gumbela (Tumidajski 1997)

$$F(d, \rho) = 1 - e^{-a_1 d} - e^{-a_2 \rho} + e^{-a_1 d - a_2 \rho - cd\rho}, \text{ gdzie } a_1, a_2, c > 0 \quad (2.22)$$

Ze względu na trudności rachunkowe przy wyznaczaniu funkcji  $F(d, \rho, w)$ , często zamiast regresji pierwszego rodzaju wyznacza się regresję drugiego rodzaju zawartości popiołu od gęstości i wielkości ziarna. Średnia zawartość popiołu w badanym materiale wyraża się wzorem (Tumidajski 1997)

$$\alpha = \int \int_D \lambda(d, \rho) f(d, \rho) d d d \rho \quad (2.23)$$

gdzie:  $D = \{(d, \rho) : d \in [d_{\min}, d_{\max}], \rho \in [\rho_{\min}, \rho_{\max}]\}$

Najczęstszymi funkcjami wykorzystywanymi do tego celu są (Dobosz 2001):

— funkcja multiplikatywna  $f(x, y) = \beta_0 x^{\beta_1} y^{\beta_2}$ ;

— funkcja wykładnicza  $f(x, y) = e^{\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y}$ ;

— funkcja logistyczna  $f(x, y) = \frac{b_0}{1 + b_1 e^{-c_1 x} + b_2 e^{-c_2 y}}$ ;

— funkcja liniowa  $f(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y$ .

Funkcję  $f(d, \rho)$  można wówczas również wyznaczyć, korzystając z metod wielowymiarowej aproksymacji jądrowej (Scott 1992; Niedoba 2005), a mianowicie

$$f(d, \rho) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \frac{1}{h_1 h_2} k_1 \left( \frac{d - d_i}{h_1} \right) k_2 \left( \frac{\rho - \rho_j}{h_2} \right) n_{ij} \quad (2.24)$$

gdzie  $k_1(x)$  i  $k_2(y)$  są jednowymiarowymi funkcjami jądrowymi, spełniającymi warunki

a)  $0 \leq k_1(x) < c_1 < +\infty, 0 \leq k_2(y) < c_2 < +\infty$ ;

b)  $\int_{-\infty}^{+\infty} k_1(x) dx = 1, \int_{-\infty}^{+\infty} k_2(y) dy = 1$ ;

c)  $k_1(x) = k_1(-x), k_2(y) = k_2(-y)$ ;

$h_1, h_2$  oznaczają długość pasm,  $N = \sum_{ij} n_{ij}$ ,  $n_{ij}$  oznacza liczebność klaso-frakcji  $(i, j)$ .

Najczęściej stosowanymi funkcjami jądrowymi są (Niedoba 2005, 2012):

a) funkcja Epanechnikowa o postaci

$$K(x) = \begin{cases} \frac{3}{4\sqrt{5}} \left( 1 - \frac{1}{5} x^2 \right) & \text{dla } |x| \leq \sqrt{5} \\ 0 & \text{dla } |x| > \sqrt{5} \end{cases} \quad (2.25)$$

b) funkcja Gaussa o postaci

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad \text{dla } x \in (-\infty, +\infty) \quad (2.26)$$

Długości pasm  $h_1$  i  $h_2$  są wówczas zadane wzorami

a) dla funkcji Epanechnikowa

$$h_1 = 1,056k \frac{1}{5} s_1, \quad h_2 = 1,056l \frac{1}{5} s_2 \quad (2.27)$$

b) dla funkcji Gaussa

$$h_1 = 1,066k^{-\frac{1}{5}}s_1, \quad h_2 = 1,066l^{-\frac{1}{5}}s_2 \quad (2.28)$$

gdzie:  $k$  – liczba klas dla zmiennej  $D$ ,  
 $l$  – liczba frakcji dla zmiennej  $P$ ,  
 $s_1$  i  $s_2$  – odchylenia standardowe tych zmiennych.

Podstawy teoretyczne metody jądrowej dla jednowymiarowej zmiennej losowej są zaprezentowane w następnym rozdziale.

Jeżeli za funkcję jądrową dla obu zmiennych przyjmie się funkcję Gaussa (2.26), to funkcja  $f(d, \rho)$  jest wówczas zadana wzorem:

$$f(d, \rho) = \frac{1}{Nh_1h_2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \frac{n_{ij}}{2\pi} e^{-\frac{(d-d_j)^2}{2h_1^2}} e^{-\frac{(\rho-\rho_j)^2}{2h_2^2}} \quad (2.29)$$

Natomiast średnią zawartość popiołu w całym materiale można obliczyć z poniższej zależności

$$\alpha = \frac{1}{2\pi Nh_1h_2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l n_{ij} \int_{d_{\min}}^{d_{\max}} \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \lambda(d, \rho) e^{\left( \frac{-(d-d_j)^2}{2h_1^2} - \frac{(\rho-\rho_j)^2}{2h_2^2} \right)} d\rho dd \quad (2.30)$$

Analogicznie można określić średnią zawartość popiołu w koncentracie i w odpadach (jak również uzysk i straty), stosując wzory (2.13–2.16).

Zaprezentowana metoda pozwala na określenie równania teoretycznej powierzchni  $\lambda = \lambda(d, \rho)$ , z tym że zbadanie dokładności aproksymacji wymaga całkowania numerycznego.

### 2.3. Analiza właściwości materiałów uziarnionych – krzywe i powierzchnie rozkładu

Jednym z podstawowych elementów oceny procesów przeróbki jest dokładne oszacowanie rozkładu średniej wartości badanych cech w nadawie i produktach. Do tego celu wykorzystuje się metody rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej. Od dawna interesowano się aproksymacją krzywych częstości badanych cech funkcjami gęstości rozkładu określonego typu. Dotyczy to również ich skumulowanych postaci, czyli dystrybuant. Bazowano na znanych z rachunku prawdopodobieństwa klasach funkcji. Z uwagi na fakt, że od rozkładu wielkości ziaren materiału zależą rozkłady innych cech

tych ziaren (Allen 1968; Bodziony 1986; Budryk 1948; Sztaba 1956; Tumidajski 1992) badania krzywych składu ziarnowego cieszyły się szczególnym zainteresowaniem i powstało wiele modeli takich krzywych opartych na znanych z rachunku prawdopodobieństwa rozkładach, jak np.

- rozkład logarytmiczno-normalny (Czornyj 1950; Epstein 1948; Kołmogorow 1941);
- rozkład Weibulla (Allen 1968; Butkiewicz 1977a, b; Lowrison 1974; Lynch 1977; Rosin, Rammler 1933; Tromp 1937; Tumidajski 1997);
- rozkład Gaudina-Schuhmanna-Andreyewa (Andrejew i in. 1980; Gaudin, Meloy 1962; Schuhmann 1960, Rosin, Rammler 1933).

Liczba modeli opisujących rozkłady gęstości ziaren oraz zawartości składników w ziarnach jest stosunkowo niewielka. Początkowo zakładano, że rozkład gęstości ziaren i zawartości składników mineralnych jest normalny (Andrejew i in. 1941; Tarchow 1958; Wichiriew 1961). Dopiero w drugiej połowie ubiegłego stulecia zaczęły pojawiać się prace podważające prawidłowość założenia o normalności tych rozkładów (Breyer 1968; Krutichowskaja, Kużelow 1960; Ozerskaja i in. 1955; Podoba 1959; Szarapow 1956). Szarapow (Szarapow 1966) oraz Gottfried (Gottfried 1981) zaproponowali na podstawie badań empirycznych aproksymację krzywych rozkładu za pomocą rozkładu logarytmiczno-normalnego lub rozkładem wykładniczym. Charakterystykę omawianych rozkładów, wraz z metodą ich linearyzacji przedstawiono w tabeli 2.1.

Najlepszą metodą oceny dokładności aproksymacji jest wyznaczenie tzw. odchylenia resztowego (błąd średniokwadratowy), którego wzór przedstawia się następująco:

$$s_r = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{p_s} (\Phi_e(d_i) - \Phi_t(d_i))^2}{p_s - 2}} \quad (2.31)$$

gdzie:  $p_s$  – liczba użytych sit o wielkościach oczek  $d_i$ ,  
 $\Phi_e(d_i)$  i  $\Phi_t(d_i)$  – wartości, odpowiednio dystrybuanty empirycznej i dystrybuanty wyznaczonej wzorem aproksymującym, dla wielkości ziaren  $d_i$ .

Modele krzywych rozkładu oparte są na określonych klasach funkcji, wśród których może nie istnieć funkcja adekwatna do opisu cech badanego materiału. Ten fakt spowodował poszukiwanie innych metod. Nielasyczne metody statystyczne po raz pierwszy w prze-róbce surowców mineralnych zostały zastosowane w 2003 roku (Niedoba 2003a, b).

Udaną próbą zastosowania nowych metod statystycznych do analizy średnich wartości badanych cech materiałów uziarnionych była praca doktorska (Niedoba 2005).

W pracy tej zastosowano cztery nielasyczne metody:

- metoda *bootstrap* – charakterystykę tej metody oraz jej rozwój można prześledzić w pracach (Efron 1979, 1981, 1982, 1985, 1987; Gray, Schucany 1972; Parr 1983; Hall 1986, 1988; Athreya 1983, 1987; Beran 1984) oraz monografiach (Beran,

Tabela 2.1

Zestawienie charakterystyk omawianych rozkładów

Table 2.1

Juxtaposition of the characteristics of discussed distributions

Nazwa rozkładu	Parametry	Dystrybuanta	Linearyzacja dystrybuanty
Weibulla	$d_0, c$	$\Phi(d) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{d}{d_0}\right)^c\right], d \geq 0$	$\ln \ln \frac{1}{1 - \Phi(d)} = c \ln d - c \ln d_0$
G-A-S	$d_{\max}, c$	$\Phi(d) = \left(\frac{d}{d_{\max}}\right)^c, 0 \leq d \leq d_{\max}$	$\log(\Phi(d)) = c \log d - c \log d_{\max}$
Log-norm	$m, \sigma$	$\Phi(d) = \Phi_0\left(\frac{\ln d - m}{\sigma}\right)$	$\Phi_0^{-1}(u) = \frac{1}{\sigma} \ln d - \frac{m}{\sigma}$
Gaudina-Meloya	$d_0, r$	$\Phi(d) = 1 - \left(1 - \frac{d}{d_0}\right)^r$	$\ln(1 - \Phi(d)) = r \ln \left[1 - \left(1 - \frac{d}{d_0}\right)^r\right]$
Mianowskiego M I	$d_1, n_1$	$\Phi(d) = 1 - \left[\cosh\left(\frac{d}{d_1}\right)^{n_1}\right]^{-1}$	$\ln \ln \frac{1 + \sqrt{1 - (1 - \Phi(d))^{n_1}}}{1 - \Phi(d)} = n_1 \ln d - n_1 \ln d_1$
M II (Tumidajskiego)	$d_0, n_0$	$\Phi(d) = \left[\cosh\left(\frac{d}{d_0}\right)^{-n_0}\right]^{-1}$	$\ln \ln \frac{1 + \sqrt{1 - (\Phi(d))^{n_0}}}{\Phi(d)} = -n_0 \ln d + n_0 \ln d_0$
Frecheta	$d_0, n_0$	$\Phi(d) = \exp\left[-\left(\frac{d}{d_0}\right)^{-n_0}\right]$	$\ln \ln \frac{1}{\Phi(d)} = n_0 \ln d - n_0 \ln d_0$

gdzie:  $\Phi_0(u)$  – dystrybuanta rozkładu  $N(0,1)$ ;  $\Phi_0^{-1}(u)$  – funkcja odwrotna do  $\Phi_0$ .

Ducharme 1991; Edgington 1987; Efron, Tibshirani 1993; Noren 1989; Mammen 1992, Hall 1992);

- metody bayesowskie – rozwijały się równoległe ze statystyczną teorią decyzji (Domański, Pruska 2000; Krzyśko 1997). Pod koniec ubiegłego wieku nastąpił szybki rozwój tej teorii, jak również jej zastosowań, między innymi w medycynie (Geman, Geman 1984; Neal 1996; Vehtari i in. 1998, 2000), w ochronie środowiska (Bernier 1991, 1994; Fiering, Rogers 1991; Hobbs i in. 1994, 1996), w ekonometrii (Geweke 1999, 2000) oraz w innych dziedzinach nauki. Na uwagę zasługuje możliwość zastosowania tej metody do szacowania ryzyka w różnych procesach;

- metoda jądrowa – jedna z głównych metod nowoczesnej teorii nieparametrycznej estymacji funkcji gęstości rozkładu badanej cechy. Metodę tę zapoczątkował Rosenblatt (Rosenblatt 1956). Rozwinięcie tej metody dla estymacji funkcji gęstości jednowymiarowej zmiennej losowej można znaleźć w pracach (Whittle 1958; Parzen 1962; Watson 1963; Stone 1984), natomiast dla estymacji funkcji gęstości wielowymiarowej zmiennej losowej w pracach (Cacoullos 1966; Epanechnikov 1969; Sain 2001; Scott 1992). Sporą część wyników tych badań zamieszczono w monografiach (Efromovich 1999; Eggermont, La Ricia 2001; Eubank 1988; Prakasa Rao 1983; Silverman 1986);
- metoda Fouriera – również znana metoda nowoczesnej teorii estymacji funkcji gęstości jednowymiarowej zmiennej losowej, przy użyciu szeregu Fouriera (Chentsov 1962; Efron, Tibshirani 1996; Schwartz 1967; Wahba 1981; Watson 1969). Większość wyników tych prac zamieszczono w podręcznikach (Devroye, Györfi 1985; Efromovich 1999; Hart 1997; Tompson, Tapia 1990; Silverman 1986).

Powyższe metody zastosowano, między innymi, do aproksymacji krzywych rozkładu średniej zawartości miedzi legnicko-głogowskiego zagłębia miedziowego, jak również do estymacji krzywych składu ziarnowego oraz estymacji przedziałowej (Niedoba, Tumidajski 2005).

Podstawy teoretyczne nieklasycznych metod statystycznych stosowanych w niniejszej monografii zamieszczono w podrozdziale 2.3.1.

W wielu procesach separacji o rozdziale materiału uziarnionego na produkty decyduje więcej niż jedna cecha (np. przy wzbogacaniu grawitacyjnym, czy klasyfikacji przepływowej). Zatem wydaje się zasadnym badanie wielowymiarowych rozkładów właściwości ziaren. Literatura na ten temat jest skromna (Lyman 1993; Tumidajski 1997; Niedoba 2008, 2009, 2010, 2011; Niedoba, Surowiak 2012). W pracy (Tumidajski 1997) aproksymowano dwuwymiarową dystrybuantę empiryczną  $F(d, \rho)$  dla miałów kopalni Staszic (gdzie  $d$  – wielkość ziarna;  $\rho$  – gęstość ziarna). Zastosowano w tym celu rozkłady: logistyczny, Pareto i Gumbela (Butkiewicz, Hys 1977) oraz rozkład Morgensterna (Morgenstern 1956).

### 2.3.1. Podstawy teoretyczne nieklasycznych metod statystycznych

Jak już wspomniano, w badaniach przeróbczych zazwyczaj nie wiadomo (lub wiadomo niewiele) o postaci rozkładu badanej zmiennej losowej  $X$ . Najczęściej stosuje się metody estymacji parametrycznej, które nie zawsze dają dobre wyniki. W związku z tym, w niniejszej monografii zastosowano również metody nieparametrycznej estymacji statystycznej, takie jak:

- **estymacja jądrowa funkcji gęstości rozkładu zmiennych losowych**

Metoda jądrowa jest jedną z głównych metod nowoczesnej teorii nieparametrycznej estymacji funkcji gęstości rozkładu badanej cechy.

Estymator jądrowy funkcji gęstości rozkładu zmiennej losowej  $X$ , ma postać:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-x_i}{h}\right) \quad (2.32)$$

gdzie funkcja  $K(x)$  zwana jądrem jest funkcją nieujemną, spełniającą warunek (Efromovich, 1999):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(x) dx = 1 \quad (2.33)$$

natomiast  $h > 0$  jest parametrem zwanym szerokością pasma lub parametrem wygładzającym ( $x_1, \dots, x_n$ ) oznacza realizację próbki losowej.

Miarą dopasowania estymatora  $\hat{f}(x)$  do prawdziwej funkcji gęstości  $f(x)$  jest tak zwany błąd średniokwadratowy (Silverman 1986)

$$MSE(\hat{f}) = E_f (\hat{f}(x) - f(x))^2 \quad (2.34)$$

Jednak najczęściej stosowanym kryterium jakości estymatora, które mierzy globalne dopasowanie  $\hat{f}$  do estymowanej gęstości jest scałkowany błąd średniokwadratowy (MISE)

$$MISE(\hat{f}) = E \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{f}(x) - f(x))^2 dx \right\} \quad (2.35)$$

który można zapisać w postaci

$$MISE(\hat{f}) = \int_{-\infty}^{\infty} [E(\hat{f}(x)) - f(x)]^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} \text{var}(\hat{f}(x)) dx \quad (2.36)$$

Zasadnym jest pytanie, czy istnieje taki wybór jądra (optymalnego) oraz szerokości (optymalnej) pasma  $h$ , przy którym scałkowany błąd średniokwadratowy estymatora jądrowego jest najmniejszy dla dowolnej estymowanej funkcji gęstości.

Odpowiedź jest pozytywna (Silverman 1986) o ile estymowana funkcja gęstości spełnia pewne warunki regularności (jest dwukrotnie różniczkowalna i druga pochodna spełnia warunek Lipschitza dowolnego rzędu). Udowodniono, że jedynym asymptotycznie optymalnym jądrem jest jądro Epanechnikowa, dane wzorem:

$$K(x) = \begin{cases} \frac{3}{4\sqrt{5}b} \left(1 - \frac{1}{5b^2} x^2\right) & \text{dla } |x| \leq b\sqrt{5} \\ 0 & \text{dla } |x| > b\sqrt{5} \end{cases} \quad (2.37)$$

gdzie:  $b$  – parametr skali  $\left( \int_{-\infty}^{\infty} t^2 K(t) dt = b^2 \right)$

Dla innych funkcji jądrowych miarą dobrego dopasowania jest tzw. współczynnik efektywności, zdefiniowany następująco:

$$ef(K) = \frac{3}{5\sqrt{5}} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} t^2 K(t) dt \right]^{-\frac{1}{2}} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} (K(t))^2 dt \right]^{-1} \quad (2.38)$$

który dla jądra Epanechnikowa ma wartość 1. Najczęściej stosowane (Silverman 1986) funkcje jądrowe są zamieszczone w tabeli 2.2.

Tabela 2.2

Stosowane funkcje jądrowe wraz z ich współczynnikami efektywności

Table 2.2

Applied kernel functions with their efficiency coefficients

Jądro	K(x)	Współczynnik efektywności
Epanechnikowa	$\frac{3}{4\sqrt{5}} \left(1 - \frac{1}{5}x^2\right)$ dla $ x  \leq \sqrt{5}$ 0 – poza tym	1
Dwuwagowe	$\frac{15}{16}(1-x^2)^2$ dla $ x  \leq 1$ 0 – poza tym	$\left(\frac{3087}{3125}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 0,9939$
Trójkątne	$1- x $ dla $ x  \leq 1$ 0 – poza tym	$\left(\frac{243}{250}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 0,9859$
Gaussowskie	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$ , $x \in R$	$\left(\frac{36\pi}{125}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 0,9512$
Prostokątne	$\frac{1}{2}$ dla $ x  < 1$ 0 – poza tym	$\left(\frac{108}{125}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 0,9295$

Z porównania współczynników efektywności w powyższej tabeli wynika, że jeżeli użyje się jądra gaussowskiego, czy trójkątnego zamiast optymalnego jądra Epanechnikowa to różnice będą niewielkie. Doboru optymalnej szerokości pasma dokonuje się (Gajek, Kałuszka 2000) następująco:

jeżeli zastosujemy jądro Epanechnikowa to:

$$h_{opt} = 1,056n^{-\frac{1}{5}}\sigma \quad (2.39)$$

natomiast w przypadku jądra gaussowskiego:

$$h_{opt} = 1,066n^{-\frac{1}{5}}\sigma \quad (2.40)$$



gdzie:  $n$  – liczebność próbki,  
 $\sigma$  – odchylenie standardowe.

W praktyce  $\sigma$  zastępujemy estymatorem  $s$  obliczonym na podstawie próbki losowej, według wzoru  $s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$

— **estymacja funkcji gęstości rozkładu zmiennej losowej X metodą Fouriera**

Metoda Fouriera jest również znaną metodą nowoczesnej teorii estymacji funkcji gęstości jednowymiarowej zmiennej losowej.

Dany jest ortonormalny ciąg funkcji  $\{\varphi_j(x)\}$  na przedziale  $[0, 1]$  w następujący sposób

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } j = 0 \\ \sqrt{2} \cos(\pi j x) & \text{dla } j = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.41)$$

Niech  $f(x)$  oznacza gęstość badanego rozkładu. Wówczas korzystając z teorii szeregów Fouriera możemy przedstawić  $f(x)$  za pomocą nieskończonej sumy postaci

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} Q_j \varphi_j(x),$$

gdzie  $Q_j$  oznaczają współczynniki Fouriera zadane wzorem:

$$Q_j = \int_0^1 f(x) \varphi_j(x) dx, \quad j = 1, 2, \dots \quad (2.42)$$

Natomiast  $\varphi_j(x)$  są dane wzorem (2.41).

Estymatorem funkcji gęstości  $f(x)$  badanego rozkładu jest suma częściowa szeregu Fouriera

$$f_J(x) = \sum_{j=0}^J Q_j \varphi_j(x) \quad (2.43)$$

gdzie:  $J$  – parametr obcięcia (Tarter, Lock 1990).

W wielu przypadkach stosuje się wygładzanie współczynników Fouriera (Watson 1969; Efromovich 1999) mnożąc je przez stałe, które przyjmują wartości z przedziału  $[0, 1]$ , a za estymator przyjmuje się wówczas uogólnioną sumę częściową  $f_J(x, \{\omega_j\}) =$

$$= \sum_{j=0}^J \omega_j Q_j \varphi_j(x), \quad \text{dla } x \in [0, 1], \text{ gdzie } \omega_j \in [0, 1], Q_j \text{ i } \varphi_j(x) \text{ są określone odpowiednio}$$

wzorami (2.41) i (2.42).

Statystyczny problem estymacji gęstości  $f$  polega na wyznaczeniu estymatora dla

- a) współczynników Fouriera  $Q_j$ ,
- b) parametru obciążenia  $J$ ,
- c) współczynników wag  $\omega_j$ .

Niech  $X$  oznacza badaną zmienną losową, a  $x_1, \dots, x_n$   $n$ -elementową realizację próbki losowej tej zmiennej. Zakładamy, że zmienna losowa  $X$  przyjmuje wartości z przedziału  $[0, 1]$ .

Jako estymatora współczynników Fouriera  $Q_j$  używa się:

$$\hat{Q}_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \varphi_j(x_i) \quad (2.44)$$

Estymator ten jest estymatorem nieobciążonym i mocno zgodnym (Efromovich 1999).

Następnym krokiem jest wybór parametru obciążenia  $J$ . Kryterium doboru oparto na scałkowanym błędzie średniokwadratowym (błąd MISE – wzór (2.35)), który mierzy globalne dopasowanie estymatora. Za estymator parametru obciążenia przyjmuje się:

$$\hat{J} = \arg \min_{0 \leq J \leq J_n} \sum_{j=0}^J \left( \frac{2\hat{Q}_0}{n} - \hat{Q}_j^2 \right) \quad (2.45)$$

dla którego  $\arg \min_{0 \leq J \leq J_n} (a_s)$  przyjmuje wartości równe wskaźnikowi  $s$  najmniejszego elementu spośród  $(a_0, \dots, a_s)$ , natomiast  $J_n$  oznacza część całkowitą liczby  $(4 + 0,5 \ln n)$  (Efromovich 1999)

Dla estymatorów wag  $\omega_j$  stosuje się następującą regułę:

$$\hat{\omega}_0 = 1, \hat{\omega}_j = \left( 1 - \frac{\hat{Q}_0}{n\hat{Q}_j^2} \right)_+ \quad \text{dla } j > 0 \quad (2.46)$$

gdzie:  $(x)_+ = \max(0, x)$ ;

#### — metody bayesowskie

Odmienność metod bayesowskich wynika z uwzględnienia w procesie wnioskowania statystycznego informacji pochodzącej spoza próbki wylosowanej z populacji generalnej (Box, Tiao 1992; Berger 1985; Domański, Pruska 2000; Krzyśko 1997). Cechą charakterystyczną analizy bayesowskiej jest przyjęcie założenia, że szacowany parametr rozkładu badanej zmiennej losowej jest również zmienną losową o rozkładzie określonym na podstawie informacji nie pochodzących z badanej próbki losowej, zwanym rozkładem *a priori* parametru  $\Theta$ . Rozkład *a priori* określa się na podstawie posiadanych informacji pochodzących np. z wcześniejszych badań. W przypadku całkowitego braku wiedzy o sza-

cowanym parametrze, wprowadza się nieinformacyjne rozkłady *a priori*, nie będące rozkładami prawdopodobieństwa (Szreder 1994).

Założmy, że badamy populację ze względu na zmienną  $X$ , której rozkład zależy od parametru  $\Theta \in \Omega$ . Na podstawie prostej próbki losowej  $x = (X_1, \dots, X_n)$  należy podjąć decyzję  $d \in D$  ( $D$  – zbiór wszystkich możliwych decyzji) o wielkości parametru  $\Theta$ . Ponieważ decyzję  $d$  podejmujemy na podstawie wyników próbki, więc możemy ją uznać za zmienną losową zwaną funkcją decyzyjną.

Funkcją straty przy podejmowaniu decyzji dotyczącej wartości parametru  $\Theta$  nazywa się funkcję  $L(\Theta, d)$  określoną dla  $\Theta \in \Omega$  i  $d \in D$ , której wartościami są wielkości straty poniesionej na skutek podjęcia określonej decyzji  $d$ . Najczęściej stosowanymi funkcjami straty są funkcje (kwadratowa i modułowa) określone następująco:

$$\begin{aligned} L(\Theta, d) &= C(d - \Theta)^2, C > 0 \\ L(\Theta, d) &= C|d - \Theta|, C > 0 \end{aligned} \quad (2.47)$$

W analizie bayesowskiej wprowadza się również pojęcie funkcji ryzyka (ryzyka spowodowanego podjęciem decyzji  $d$  przy ustalonej wartości parametru  $\Theta$ ). Funkcja ryzyka ma postać:

$$R(\Theta, d) = E_{\Theta} L(\Theta, d(x)) \quad (2.48)$$

gdzie:  $E_{\Theta} L(\Theta, d(x))$  oznacza wartość oczekiwaną straty spowodowanej decyzją  $d$  przy ustalonej wartości parametru  $\Theta$ . Skoro parametr  $\Theta$  (zgodnie z głównymi założeniami analizy bayesowskiej) jest zmienną losową, to wobec tego funkcja ryzyka  $R(\Theta, d)$  jest również zmienną losową, można więc rozpatrywać wartość oczekiwaną tej zmiennej.

Ryzykiem bayesowskim odpowiadającym ustalonej funkcji decyzyjnej  $d$ , nazywa się następującą funkcję:

$$r(g, d) = E_d R(\Theta, d) \quad (2.49)$$

gdzie:  $E_d R(\Theta, d)$  – wartość oczekiwana funkcji ryzyka przy ustalonej decyzji  $d$ ,  
 $g$  – funkcja gęstości prawdopodobieństwa rozkładu *a priori* parametru  $\Theta$ .

Jeżeli parametr  $\Theta$  jest zmienną losową typu skokowego o funkcji prawdopodobieństwa

$$g(\Theta_k) = P(\Theta = \Theta_k), k = 1, 2, \dots \quad (2.50)$$

gdzie:  $0 \leq g(\Theta_k) \leq 1$  i  $\sum_k g(\Theta_k) = 1$ , to:

$$r(g, d) = \sum_k R(\Theta_k, d) g(\Theta_k) \quad (2.51)$$

Jeśli  $\Theta$  ma rozkład ciągły o gęstości  $g$  to:

$$r(g, d) = \int_{\Omega} R(\Theta, d) g(\Theta) d\Theta \quad (2.52)$$

Przy podejmowaniu decyzji dotyczącej szacowania wartości parametru  $\Theta$  dąży się do tego, aby wielkość straty i ponoszone ryzyko były najmniejsze. Dlatego estymatorem bayesowskim parametru  $\Theta$  względem rozkładu *a priori* określonego za pomocą funkcji prawdopodobieństwa lub gęstości nazywamy statystykę  $d_0 = d_0(X_1, \dots, X_n)$ , dla której zachodzi:

$$r(g, d_0) = \inf_{d \in D} r(g, d) \quad (2.53)$$

Mając dany rozkład *a priori* parametru  $\Theta$  oraz dodatkowe informacje o jego rozkładzie na podstawie próbki wylosowanej z populacji, możemy określić rozkład warunkowy tego parametru.

Jeżeli założymy, że  $f(x|\Theta)$  jest łączną funkcją prawdopodobieństwa lub łączną funkcją gęstości próbki losowej  $x = (x_1, \dots, x_n)$  zależnej od parametru  $\Theta$ , którego rozkład jest określony przez funkcję  $g$  (funkcję gęstości lub prawdopodobieństwa), to łączny rozkład próbki losowej i parametru  $\Theta$  jest wyznaczony przez funkcję:

$$h(x, \Theta) = f(x|\Theta)g(\Theta) \quad (2.54)$$

Jeżeli znamy funkcję (2.54), to możemy wyznaczyć rozkład warunkowy parametru  $\Theta$ , stosując wzór będący uogólnieniem wzoru Bayesa:

$$g(\Theta|x) = \begin{cases} \frac{f(x|\Theta) \cdot g(\Theta)}{\sum_k f(x|\Theta_k) \cdot g(\Theta_k)} & \text{gdy } \Theta \text{ ma rozkład skokowy o funkcji prawd. } g \\ \frac{f(x|\Theta) \cdot g(\Theta)}{\int_{\Omega} f(x|\Theta) \cdot g(\Theta) d\Theta} & \text{gdy } \Theta \text{ ma rozkład ciągły o funkcji gęstości } g \end{cases} \quad (2.55)$$

Rozkład ten nazywa się rozkładem *a posteriori* parametru  $\Theta$ .

Warto zauważyć, że w mianownikach wzorów (2.55) występuje złożenie łącznego rozkładu próbki losowej (zależnej od parametru  $\Theta$ ) określonego przez  $f(x|\Theta)$  z rozkładem *a priori* parametru  $\Theta$  zadany przez  $g(\Theta)$ . Zatem rozkład *a posteriori* parametru  $\Theta$  jest określony za pomocą wzoru (uogólnionego) Bayesa z zastosowaniem złożenia rozkładów.

Przy wyznaczaniu estymatora bayesowskiego parametru  $\Theta$  korzysta się z twierdzenia (Domański, Pruska 2000), które mówi, że jeżeli  $g(\Theta)$  jest funkcją prawdopodobieństwa lub gęstości rozkładu *a priori* parametru  $\Theta$ ,  $g(\Theta|x)$  jest funkcją prawdopodobieństwa lub gęstości rozkładu *a posteriori* parametru  $\Theta$  dla danego wektora  $(x_1, \dots, x_n)$  wyników próbki oraz  $L(\Theta, d)$  jest funkcją straty przy tych rozkładach (*a priori* i *a posteriori*) parametru  $\Theta$ , a decyzja  $d \in D$ , to estymatorem bayesowskim parametru  $\Theta$  jest statystyka  $d_0$  spełniająca warunek:

$$E_{\Theta}L(\Theta, d_0) = \inf_{d \in D} E_{\Theta}L(\Theta, d) \quad (2.56)$$

Tak więc postać estymatora parametru  $\Theta$  zależy nie tylko od rozkładów *a priori* i *a posteriori* tego parametru, ale również od doboru funkcji straty  $L$ .

Jeżeli funkcja straty jest funkcją kwadratową, tzn.

$$L(\Theta, d) = C(d - \Theta)^2, C > 0 \quad (2.57)$$

to oceną bayesowską parametru  $\Theta$  jest wartość oczekiwana rozkładu *a posteriori* parametru  $\Theta$  (Domański, Pruska 2000).

W analizie bayesowskiej możliwa jest nie tylko estymacja punktowa parametrów badanego rozkładu, lecz również estymacja przedziałowa. Jeżeli znamy rozkład *a posteriori* parametru  $\Theta$  dla wektora próbki  $x$  to prawdopodobieństwo tego, że  $\Theta \in B$  (gdzie  $B$  – zadany zbiór (przedział)) wyznaczymy ze wzoru:

$$P(\Theta \in B|x) = \begin{cases} \sum_{\Theta_i \in C} g(\Theta_i|x) \\ \int_C g(\Theta|x)d\Theta \end{cases} \quad (2.58)$$

gdzie: w pierwszym przypadku:  $g$  – funkcja prawdopodobieństwa rozkładu *a posteriori* parametru  $\Theta$ ,  
a w drugim gęstość rozkładu *a posteriori* parametru  $\Theta$ .

Mając dany rozkład *a posteriori* parametru  $\Theta$  dla wyników próbki prostej  $x$  oraz funkcję straty  $L$  określamy przedział ufności parametru  $\Theta$  dla zadanego współczynnika ufności  $(1-\alpha)$ . Przedziałem ufności parametru  $\Theta$  nazywamy taki zbiór  $B$ , dla którego:

$$P(\Theta \in B|X) = 1 - \alpha \quad (2.59)$$

## 2.4. Metoda krigingu

Jedną z gałęzi statystyki stosowanej są tzw. metody geostatystyczne, bazujące głównie na analizie wariogramów i krigingu. Początki teoretyczne tych metod powstały już w latach trzydziestych i czterdziestych XX wieku. Natomiast pierwsze zastosowania zostały zrobione w Afryce Południowej przez inżyniera górnika G. Krige'a i statystyka H.S. Sichel (Sichel 1952). Późniejsze badania Krige'a (Krige 1975, 1976, 1981; Krige i in. 1989) miały duży wpływ na rozwój tej teorii. W latach pięćdziesiątych XX wieku technikami geostatystycznymi zainteresował się i rozwinął je francuski matematyk G. Matheron (Matheron 1962–63, 1971, 1989), który stworzył spójny i przejrzysty formalizm teoretyczny geostatystyki. Wprowadził również nazwy najważniejszych pojęć, w tym pojęcia geostatystyki i krigingu (na cześć Krige'a). Od tego czasu nastąpił burzliwy rozwój tej dziedziny nauki. Początkowo metody te były stosowane głównie do oceny zasobów złóż kopalin stałych, oceny ich parametrów, jak również innych zadań geologiczno-górnicznych (David 1977, 1988; Guarascio i in. 1975–76; Journel, Huijbregts 1978; Matheron 1989; Parker 1984; Ravenscroft, Armstrong 1985; Rendu 1979; Verly i in. 1984).

Z czasem (Zawadzki 2011) znalazły zastosowanie również w innych dziedzinach nauki, m.in.:

- w badaniach środowiska naturalnego (Isaaks 1990; Namysłowska-Wilczyńska 1994, 1997, 2002, 2006; Olea 1999; Rouhani i in. 1995; Stein 1985; Webster, Oliver 2000; Zawadzki 2002);
- w geologii (Dębowska, Zawadzki 2005; Falivene i in. 2007; Koch, Link 1986; Heriawan i in. 2008; Hindistan i in. 2010; Namysłowska-Wilczyńska 1993, 1997; Rouhani i in. 1995; Saikia i in. 2007; Touati i in. 1999; Watson i in. 2001);
- w górnictwie (Mucha 2002; Mucha, Wasilewska 2006, 2009; Rendu 1988; Royle 1979);
- w badaniach gleby (Atteia i in. 1994; Fabijańczyk 2010; Goovaerts 1999, 2000, 2001; Namysłowska-Wilczyńska 1994; Srivastava, Parker 1988; Zawadzki 2002);
- w rolnictwie (Baranowski i in. 1994; Usowicz 1999; Usowicz, Usowicz 2004);
- w leśnictwie (Bowers i in. 1994; Kint i in. 2003; Kohl, Gertner 1997; Paolo i in. 2002; St-Onge, Cavayas 1995, 1997; Wallace i in. 2000);
- w hydrologii (Bellhouse 1977; Benson 1966; Cressie, Horton 1987);
- w elektroenergetyce i inżynierii środowiska (Namysłowska-Wilczyńska, Wilczyński 2003; Namysłowska-Wilczyńska i in. 2004);
- w meteorologii (Stach 2007a; b);
- w obserwacjach satelitarnych (Atkinson 1993; Chica-Olmo, Abarca-Hernandez 2000; Cohen i in. 1990; Curran 1988; Jakomulska, Clarke 2001; Jupp i in. 1988, 1989; Marceau i in. 1994, 1994; McBratney, Webster 1986; Miranda i in. 1992; Miranda, Carr 1994; Usowicz i in. 2009; Zawadzki 2005; Zawadzki i in. 2005);
- w badaniach epidemiologicznych, socjologicznych, finansowych i społecznych (Bivand 1998; Haining 1990; Luc 2000; Pace i in. 1998).

Zasady geostatystyki po raz pierwszy całościowo przedstawił J.A. Czubek w swoich wykładach (Czubek 1981). Dokładną charakterystykę tej dziedziny nauki można znaleźć

w pracach (Chilčs, Delfiner 1979; Cressie 1991; David 1988; Goovaerts 1997; Namy-słowska-Wilczyńska 2006; Panatier 1996; Webster, Oliver 2000).

W przeróbce surowców mineralnych po raz pierwszy zastosowano metodę kriginu zwyczajnego w roku 2010 (Niedoba 2010).

Węgiel jako surowiec energetyczny cechuje się wieloma parametrami określającymi jego jakość. Dane dotyczące tych parametrów są traktowane zazwyczaj jako niezależne wielkości. Takie podejście nie zawsze jest właściwe, co pokazano w poprzednich rozdziałach.

Do badania rozkładów cech materiałów uziarnionych, jak również zależności pomiędzy nimi, można także zastosować metodę kriginu zwyczajnego. W przeróbce surowców mineralnych stosuje się ją zazwyczaj do ustalenia jak kształtuje się rozkład wielkości ustalonej cechy ziarna materiału w zależności od innych jego cech, jak np. wielkości ziarna od jego gęstości, czy też zawartości określonego składnika lub też innej właściwości (w przypadku węgla może to być liczba Rogi, wartość ciepła spalania itp.) od wielkości ziarna i jego gęstości. Metoda ta pozwala określić badane właściwości dla ziarna o dowolnej wielkości i gęstości (na podstawie danych doświadczalnych). Wyniki (dane) uzyskane metodą kriginu zwyczajnego dają możliwość dokładniejszego opisu wielowymiarowego modelu, charakteryzującego dane złożę (pokład), z którego pochodzi analizowany materiał aniżeli na podstawie tylko danych doświadczalnych. Ponadto wyniki uzyskane metodą kriginu zwyczajnego, zastosowane dla materiałów pochodzących z różnych złóż, pozwalają na określenie istotnych różnic pomiędzy nimi.

#### 2.4.1. Podstawy teoretyczne metody kriginu zwyczajnego

Materiał uziarniony został podzielony na  $n$  frakcji w zależności od jednej lub dwóch jego cech (np. wielkości i gęstości ziarna). W ten sposób dla  $n$  ziaren otrzymano punkty  $P_i = (x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , gdzie  $x_i$  oznacza średnią wielkość cechy  $X$  z  $i$ -tej frakcji, a  $y_i$  średnią wartość cechy  $Y$  z  $i$ -tej frakcji. Następnie określić należy odległość pomiędzy ziarnami  $P_i$  i  $P_j$ , stosując wzór:

$$\delta(P_i, P_j) = \sqrt{a^2 (x_i - x_j)^2 + b^2 (y_i - y_j)^2} \quad (2.60)$$

Gdzie  $a$  i  $b$  są pewnymi współczynnikami tak dobranymi, aby obie właściwości miały taki sam wpływ na odległość między ziarnami. W przypadku, gdy materiał został podzielony ze względu na jedną cechę, np. wielkość lub gęstość ziarna, to odległość  $\delta(P_i, P_j) = |x_i - x_j|$  lub  $\delta(P_i, P_j) = |y_i - y_j|$ .

Niech  $Z$  oznacza właściwość ziarna (zawartość popiołu, siarki, ciał lotnych itd. w materiale węglowym). Należy traktować  $Z$  jako zmienną losową, która jest funkcją wielkości i gęstości ziarna, czyli  $Z = Z(\rho, d)$ . Dla wyznaczenia tej zależności można posłużyć się klasycznymi metodami statystycznymi, wyznaczając funkcję regresji drugiego rodzaju.

W tym rozdziale zastosowana zostanie punktowa aproksymacja zmiennej  $Z$ , z użyciem teorii krigingu zwyczajnego. Klasycznym pojęciem w teorii krigingu jest funkcja wariogramu funkcji losowej, która jest określona za pomocą wzoru

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} E[Z(P+h) - Z(P)]^2 \quad (2.61)$$

gdzie:  $E(X)$  oznacza wartość średnią zmiennej losowej  $X$ , natomiast  $P+h$  oznacza punkt odległy od punktu  $P$  o wielkość  $h$ .

Do określenia estymatora empirycznego wariogramu  $\gamma(h)$  zastosowano estymator empiryczny Matherona w postaci

$$\gamma^*(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} (Z(P_i+h) - Z(P_i))^2 \quad (2.62)$$

gdzie:  $Z(P_i)$  – dane doświadczalne,

$N(h)$  – liczba punktów  $P_i, P_i+h$ , które są odległe od siebie o wielkość  $h$ .

Na podstawie danych empirycznych konstruuje się różne modele teoretyczne funkcji wariogramu. Najpopularniejszymi są następujące modele teoretyczne:

a) model sferyczny

$$\gamma(h) = \begin{cases} C \cdot \left( 1,5 \frac{h}{a} - 0,5 \left( \frac{h}{a} \right)^3 \right) + C_0 & \text{jeżeli } h \leq a \\ C + C_0 & \text{jeżeli } h > a \end{cases} \quad (2.63a)$$

b) model wykładniczy

$$\gamma(h) = C \cdot \left[ 1 - \exp\left(-\frac{h}{a}\right) \right] \quad (2.63b)$$

c) model Gaussa

$$\gamma(h) = C \cdot \left[ 1 - \exp\left(-\frac{h^2}{a^2}\right) \right] \quad (2.63c)$$

d) model liniowy

$$\gamma(h) = Ah + B \quad (2.63d)$$



e) model potęgowy

$$\gamma(h) = Ch^a \quad (2.63e)$$

Dla wszystkich modeli przyjmuje się, że  $\gamma(0) = 0$ , czyli w punkcie  $h = 0$  funkcje  $\gamma(h)$  mogą mieć punkt nieciągłości. Celem zastosowania krigingu zwyczajnego jest określenie wartości  $Z$  w innych punktach niż doświadczalne. Pozwoli to na precyzyjniejsze określenie badanej właściwości wewnątrz frakcji. To z kolei wpłynie na dokładniejsze konstruowanie różnych krzywych i powierzchni (np. krzywe i powierzchnie wzbogacalności Henry'ego, powierzchnia rozkładu, czy powierzchnie rozdziału), stosowanych w teorii przeróbki surowców mineralnych.

Oznaczając przez  $P_0$  punkt, w którym chcemy określić właściwość  $Z$  przyjmuje się, że estymator tej cechy jest dany wzorem

$$Z^*(P_0) = \sum_{i=1}^k \lambda_i Z(P_i) \quad (2.64)$$

gdzie:  $\lambda_i$  – pewne współczynniki,

$P_i$  – punkty pomiarowe, które leżą w najbliższym sąsiedztwie punktu  $P_0$ .

W praktyce polega to na przeanalizowaniu dla danego punktu estymacji  $P_0$ , czy dodanie większej ilości danych powoduje zwiększenie dokładności oszacowania. Współczynniki  $\lambda_i$  spełniają zależności

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = 1 \quad (2.65)$$

Aby wyznaczyć współczynniki  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  należy wyznaczyć minimum funkcji

$$L(\lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu) = E \left( Z(P_0) - \sum_{i=1}^k \lambda_i Z(P_i) \right)^2 - \mu \left( \sum_{i=1}^k \lambda_i - 1 \right) \quad (2.66)$$

Obliczając pochodne cząstkowe funkcji  $L$  i przyrównując je do zera otrzymujemy układ równań zapisany w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1k} & 1 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2k} & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \gamma_{k1} & \gamma_{k2} & \dots & \gamma_{kk} & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{10} \\ \gamma_{20} \\ \vdots \\ \gamma_{k0} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

gdzie:  $\gamma_{ij}$  – wartość wariogramu  $\gamma(h)$  dla  $h$  równego odległości punktu  $P_i$  od punktu  $P_j$ ,  
 $\gamma_{i0}$  – wartość wariogramu  $\gamma(h)$  dla  $h$  równego odległości badanego punktu  $P_0$  od punktu  $P_i$ .

Weryfikacji modelu dokonuje się przez porównanie wartości obliczonych metodą krigingu w punktach doświadczalnych  $P_i$  (każdorazowo usuniętych z sąsiedztwa) z wartościami empirycznymi w tych punktach. Za miarę dokładności dopasowania przyjmuje się błąd średniokwadratowy  $s_r$ .

$$s_r = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k (Z(P_i) - Z^*(P_i))^2}{k-2}} \quad (2.68)$$

gdzie:  $Z^*(P_i)$  – wartość obliczona metodą krigingu zwyczajnego,  
 $Z(P_i)$  – wartość empiryczna.

#### 2.4.2. Kriging w badaniach rozkładów cech materiałów uziarnionych

Wielowymiarowa analiza danych jest obecnie częstym zagadnieniem pojawiającym się w szeregu badań naukowych. Dotyczy to również przeróbki surowców mineralnych, gdzie jednym z potencjalnych zastosowań tego typu analizy jest badanie jakościowe surowca mineralnego ze względu na kilka jego cech. Istnieje wiele technik umożliwiających tworzenie takich modeli. W tym rozdziale zaproponowano metodę krigingu, ze szczególnym uwzględnieniem krigingu zwyczajnego. Zwyczajowo, technika ta wykorzystywana jest powszechnie w geostatystyce, w badaniach terenowych. Proponowana w pracy metodyka może być jednak wykorzystana również w innych celach, w tym w badaniach jakościowych węgla. Materiałem do badań był węgiel pobrany z jednej z kopalń Górnego Śląska, który wstępnie został rozdrobniony i podzielony na klaso-frakcje. W każdej z nich badano zawartości popiołu, siarki i części lotnych. Stanowiło to bazę do zastosowania metod krigingu zwyczajnego.

W celu ustalenia jak kształtuje się rozkład wielkości ziarna przy ustalonej gęstości zastosowano metodę krigingu zwyczajnego z odpowiednio dobraną funkcją wariogramu. Na podstawie danych doświadczalnych dotyczących rozkładu wielkości ziaren węgla, przy ustalonych gęstościach i odpowiednio dobranym wariogramem symuluje się rozkład wielkości ziaren przy dowolnej gęstości.

Przyjęto oznaczenia:  $D$  – zmienna losowa określająca wielkość ziarna;  $P$  – zmienna losowa określająca jego gęstość.

Dla wyznaczenia funkcji gęstości rozkładu warunkowego  $f(d|\rho)$  lub dystrybuanty takiego rozkładu  $F(d|\rho)$ , zastosowano metodę krigingu, aby określić zależność wielkości ziarna od jego gęstości.

Oznaczmy przez  $D(\rho)$  odwzorowanie, które ustalonej gęstości  $\rho$  przyporządkowuje wektor  $(D_1(\rho), D_2(\rho), \dots, D_k(\rho))$ , gdzie  $D_i(\rho)$  oznacza udział procentowy  $i$ -tej klasy ziarnowej w badanym materiale uziarnionym.

Załóżmy, że dysponujemy wartościami odwzorowania  $D(\rho)$  dla  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$  i chcemy oszacować wartość  $D(\rho_0)$ , gdzie  $\rho_0$  oznacza dowolną dopuszczalną wartość gęstości materiału.

Zastosowanie metody krigingu zwyczajnego wymaga założenia, że pole losowe jest polem stacjonarnym, czyli że  $E(D_i(\rho) - D_i(\rho + h)) = 0$  i  $V(D_i(\rho) - D_i(\rho + h)) = 2\gamma(h)$ , gdzie  $E(X)$  jest wartością średnią zmiennej losowej  $X$ , a  $V$  jest jej wariancją (Namysłowska-Wilczyńska 1995, 2006).

Funkcję  $\gamma(h)$  nazywa się wariogramem (lub semiwariogramem). W praktyce oznacza to, że dla oszacowania zmiennej  $D_i(\rho_0)$  bierze się pod uwagę tylko przedział  $\rho \in [a, b]$ , w którym te postulaty mogą być spełnione.

Przyjmuje się, że estymatorem  $D_i(\rho_0)$  jest predyktor

$$D_i^*(\rho_0) = \sum_{k=1}^m \lambda_k D_i(\rho_k), \text{ gdzie } \sum_{k=1}^m \lambda_k = 1 \quad (2.69)$$

Należy dobrać wartości  $\lambda_i, i = 1, \dots, m$  tak, aby funkcja

$$F(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = V \left( D_i(\rho_0) - \sum_{k=1}^m \lambda_k D_i(\rho_k) \right) \quad (2.70)$$

osiągała minimum przy warunku  $\sum_{k=1}^m \lambda_k = 1$ . Korzystając z funkcji Lagrange'a

$$L(\lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu) = F(\lambda_1, \dots, \lambda_m) + \mu \sum_{k=1}^m \lambda_k \quad (2.71)$$

otrzymujemy układ równań, z którego można wyznaczyć optymalne wartości  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  oraz  $\mu$  (wzór (2.67)).

Układ ten, dla badanego zagadnienia, ma postać

$$\Gamma \cdot X = \Gamma_1 \quad (2.72)$$

gdzie

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma(h_{11}) & \gamma(h_{12}) & \dots & \gamma(h_{1m}) & 1 \\ \gamma(h_{21}) & \gamma(h_{22}) & \dots & \gamma(h_{2m}) & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \gamma(h_{m-1,1}) & \gamma(h_{m-1,2}) & \dots & \gamma(h_{m-1,m}) & 1 \\ \gamma(h_{m1}) & \gamma(h_{m2}) & \dots & \gamma(h_{mm}) & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

$$X = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \\ \mu \end{bmatrix}, \quad \Gamma_1 = \begin{bmatrix} \gamma(h_{10}) \\ \gamma(h_{20}) \\ \vdots \\ \gamma(h_{m0}) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

gdzie:  $h_{ij}$  – odległość pomiędzy gęstościami  $\rho_i$  i  $\rho_j$  dla  $i=1, \dots, m, j=1, \dots, m$ ,  
 $h_{i0}$  – odległość pomiędzy gęstością  $\rho_i$  i  $\rho_0$ ,  $i=1, \dots, m$ ,  
 $\gamma(h)$  – odpowiednio dobrana funkcja wariogramu.

Jednym z ważniejszych elementów metody kriginu zwyczajnego jest dobór odpowiedniej funkcji wariogramu. Przy doborze tej funkcji rozważano wszystkie typy: sferyczny, wykładniczy, Gaussa, potęgowy i liniowy (wg wzorów (2.63a–e)).

Estymator Matherona (wzór (2.62)), w tym przypadku ma postać:

$$\gamma^*(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} (D(\rho_i + h) - D(\rho_i))^2 \quad (2.75)$$

gdzie:  $N(h)$  oznacza liczbę par  $(\rho_i, \rho_i+h)$ , oddalonych o odległość  $h$ .

### 3. Zastosowania praktyczne probabilistycznych modeli teoretycznych

#### 3.1. Aproksymacja krzywych wzbogacalności Henry'ego

W celu przeprowadzenia przedstawionego w rozdziale 2 opisu dokonano rozdziału węgla typu 31 (patrz załącznik), pobranego z jednej z kopalń Górnośląskiego Okręgu Przemysłowego i podzielono na frakcje według gęstości (1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9).

Wyniki doświadczalne przedstawia tabela 3.1.

**Tabela 3.1**

Rozdział węgla na frakcje gęstościowe

**Table 3.1**

Separation of coal into density fractions

$\rho_{i-1}-\rho_i$ [g/cm <sup>3</sup> ]	Średnia gęstość $\rho_{0i}$ [g/cm <sup>3</sup> ]	Udział procentowy $\gamma_i$ [%]	Udział skumulowany $\gamma_i$ [%]	Zawartość popiołu $\lambda$ [%]
<1,3	0,65	62,47	62,47	2,61
1,3–1,4	1,35	23,99	86,46	3,77
1,4–1,5	1,45	6,18	92,64	17,32
1,5–1,6	1,55	2,29	94,93	26,08
1,6–1,7	1,65	0,66	96,59	32,48
1,7–1,8	1,75	2,75	98,34	38,34
1,8–1,9	1,85	1,66	100	48,32

Do aproksymacji funkcji zastosowano funkcje logistyczne (równanie 2.9c), osobno dla frakcji o gęstości mniejszej niż 1,4 [g/cm<sup>3</sup>] oraz frakcji o gęstości większej niż 1,41 [g/cm<sup>3</sup>], które połączono na odcinku (1,4–1,41) funkcją liniową. Dla frakcji o gęstości mniejszej niż 1,3 wyznaczono zawartość popiołu w punktach o wartości ich współrzędnej gęstości równych 0,5; 0,8 oraz 1,0 (wielkości czysto teoretyczne, które nie występują w praktyce), stosując metodę krigingu zwyczajnego, a następnie dokonano aproksymacji.

Funkcja  $\lambda_0(\rho)$  ma więc postać

$$\lambda_0(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{1 + 5167,27e^{-3,793\rho}} & \text{dla } \rho \leq 1,4 \\ 0,9327\rho - 1,1748 & \text{dla } \rho \in (1,4; 1,41) \\ \frac{1}{1 + 971,25e^{-3,593\rho}} & \text{dla } \rho \geq 1,41 \end{cases} \quad (3.1)$$

Do wyznaczenia funkcji  $F(\rho)$  użyto rozkładu logistycznego (równanie 2.9c) oraz rozkładu GSA (równanie 2.9f), dla frakcji o gęstości mniejszej niż 1,3 [g/cm<sup>3</sup>] wykorzystano punkty otrzymane za pomocą metody krigingu zwyczajnego (Niedoba, Tumidajski 2012).

Otrzymana funkcja  $F(\rho)$  przedstawia się następująco

$$F(\rho) = \begin{cases} 0,0082\rho^{16,5464} & \text{dla } \rho < 1,32 \\ \frac{1}{1 + 272,3427e^{-5,3815\rho}} & \text{dla } \rho \geq 1,32 \end{cases} \quad (3.2)$$

Do oceny jakości aproksymacji zastosowano błąd średniokwadratowy (zwany również odchyleniem resztowym)  $s_r$ , według wzoru (3.3)

$$s_r = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k (\tilde{f}(\rho_i) - f(\rho_i))^2}{k-2}} \quad (3.3)$$

gdzie:  $\tilde{f}(\rho_i)$  – wartość teoretyczna,  
 $f(\rho_i)$  – wartość eksperymentalna,  
 $k-2$  – ilość pomiarów, pomniejszona o ilość badanych zmiennych, czyli w tym przypadku o 2.

Dla funkcji  $\lambda_0(\rho)$   $s_r = 1,14\%$ , a dla funkcji  $F(\rho)$   $s_r = 0,78\%$ . Można więc uznać, że funkcje te są dobrymi aproksymantami badanych zależności.

Wyniki aproksymacji zamieszczono w tabeli 3.2 oraz na rysunkach 3.1 i 3.2.

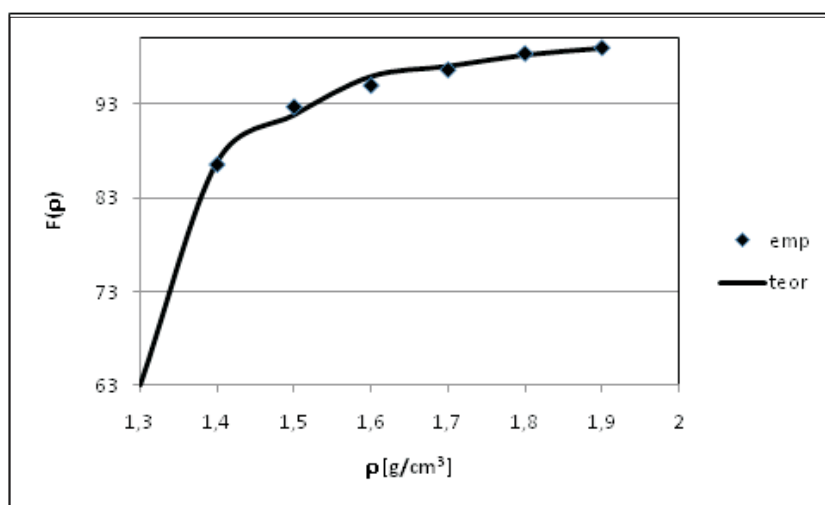
Po przekształceniu wzoru (2.9c) otrzymano dla  $x = \rho$ ,  $F(x) = \gamma$

$$\rho = F^{-1}(\gamma) = \frac{1}{c} (\ln b\gamma - \ln(1-\gamma)) \quad (3.4)$$

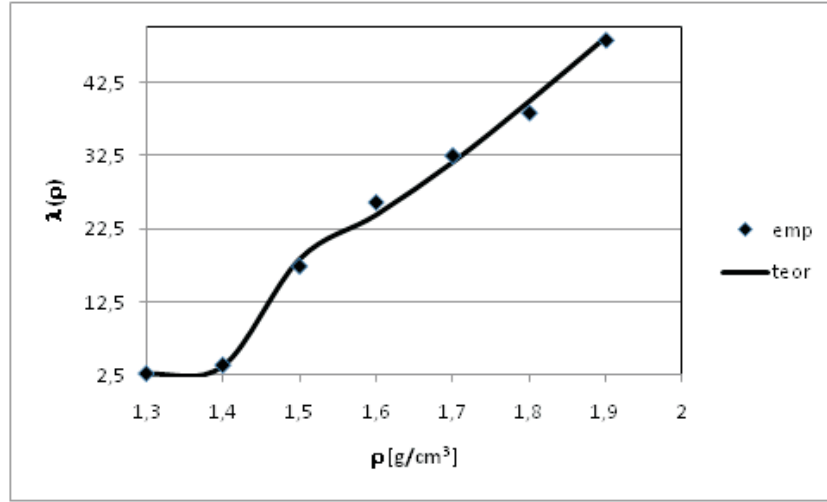
A następnie, stosując powyższy wynik we wzorze (3.2), po przekształceniach uzyskano zależność (3.5)

**Tabela 3.2**Wyniki doświadczalne i teoretyczne dla funkcji  $\lambda_0(\rho)$  i  $F(\rho)$ **Table 3.2**Experimental and theoretical results for functions  $\lambda_0(\rho)$  and  $F(\rho)$ 

Gęstość $\rho$ [g/cm <sup>3</sup> ]	$F_0(\rho)$ – doświadczalna	$F(\rho)$ – teoretyczna	Zawartość popiołu $\lambda(\rho)$ [%] – doświadczalna	Zawartość popiołu $\lambda_0(\rho)$ [%] – teoretyczna
1,3	62,47	63,00	2,61	2,60
1,4	86,46	86,82	3,77	3,78
1,5	92,64	91,84	17,32	18,40
1,6	94,93	95,95	26,08	24,42
1,7	96,59	97,04	32,48	31,63
1,8	98,34	98,25	38,34	39,96
1,9	98,96	98,96	48,32	48,70

Rys. 3.1. Wykres aproksymowanej funkcji  $F(\rho)$ Fig. 3.1. Plot of approximated function  $F(\rho)$ 

$$\rho = F^{-1}(\gamma) = \begin{cases} \left(\frac{\gamma}{0,0082}\right)^{0,0604} & \text{dla } \gamma < 0,8107 \\ 0,1868[\ln(272,3427\gamma) - \ln(1-\gamma)] & \text{dla } \gamma > 0,8107 \end{cases} \quad (3.5)$$

Rys. 3.2. Wykres aproksymowanej funkcji  $\lambda_0(\rho)$ Fig. 3.2. Plot of approximated function  $\lambda_0(\rho)$ 

Ostatecznie funkcja  $\lambda_1(\gamma) = \lambda_0(F^{-1}(\gamma))$  ma postać

$$\lambda_1(\gamma) = \begin{cases} \frac{1}{1 + 5167,27e^{-5,0698\gamma^{0,0604}}} & \text{dla } \gamma < 0,8107 \\ \frac{1}{1 + 5167,27e^{-0,7085(\ln \gamma - \ln(1-\gamma) + 5,607)}} & \text{dla } \gamma \in [0,8107; 0,8682] \\ \frac{0,1742(\ln \gamma - \ln(1-\gamma)) - 0,198}{1} & \text{dla } \gamma \in (0,8682; 0,8742) \\ \frac{1}{1 + 971,25e^{-0,6712(\ln \gamma - \ln(1-\gamma) + 5,607)}} & \text{dla } \gamma > 0,8742 \end{cases} \quad (3.6)$$

Wartości  $\lambda_1(\gamma)$  przedstawiono w tabeli 3.3 i zobrazowano na rysunku 3.3.

Funkcję  $\lambda(\gamma)$  można aproksymować również w inny sposób, a mianowicie korzystając z faktu, że  $\gamma \in [0, 1]$  oraz wartości skumulowanego  $\gamma$  stanowią ciąg rosnący, można aproksymować funkcję  $\gamma = \Phi(\lambda)$  funkcjami opisującymi dystrybuanty zmiennej losowej, a następnie wyznaczając funkcję odwrotną  $\gamma = \Phi^{-1}(\lambda)$  uzyskuje się poszukiwaną zależność.

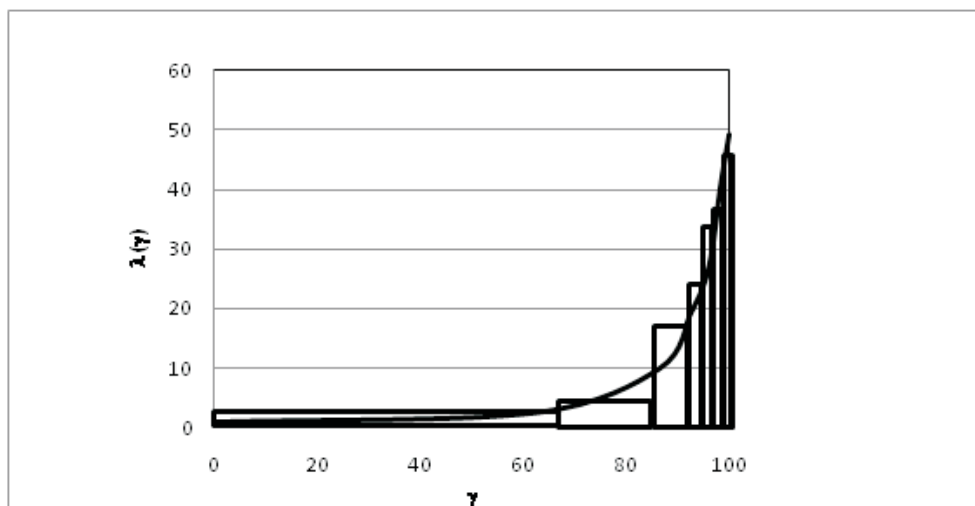
Do aproksymacji funkcji  $\gamma(\lambda)$  zastosowano połączenie dwóch funkcji typu logistycznego (równanie (2.9c)) (wartość w punkcie  $\lambda = 0,1$  została wyznaczona za pomocą metody krigingu zwyczajnego) otrzymano

$$\gamma(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{1 + 0,9955e^{-13,794\lambda}} & \text{dla } \lambda < 0,1 \\ \frac{1}{1 + 0,5750e^{-8,2088\lambda}} & \text{dla } \lambda > 0,1 \end{cases} \quad (3.7)$$



**Tabela 3.3**Wartości funkcji wzbogacalności  $\lambda_1(\gamma)$ **Table 3.3**Values of beneficiation function  $\lambda_1(\gamma)$ 

$\gamma$ [%]	$\lambda_1(\gamma)$ [%]
62,47	2,59
86,46	3,63
92,64	19,51
94,93	23,76
96,59	29,35
98,34	40,72
100	49,24

Rys. 3.3. Funkcja wzbogacalności Henry'ego  $\lambda_1(\gamma)$ Fig. 3.3. Henry's beneficiation function  $\lambda_1(\gamma)$ 

Jeżeli funkcja  $\gamma(\lambda) = \frac{1}{1 + be^{-c\lambda}}$ , to funkcja do niej odwrotna jest postaci

$$\lambda(\gamma) = \frac{1}{c} (\ln \gamma - \ln(1-\gamma) + \ln b) \quad (3.8)$$

Stosując powyższy związek dla równania (3.7) otrzymuje się następującą postać szukaną funkcji

$$\lambda_2(\gamma) = \begin{cases} 0,026 & \text{dla } \gamma < 0,51 \\ 0,072(\ln \gamma - \ln(1-\gamma) - 0,0045) & \text{dla } \gamma \in (0,51; 0,8) \\ 0,12(\ln \gamma - \ln(1-\gamma) - 0,55) & \text{dla } \gamma \in (0,8; 0,99) \\ 0,49 & \text{dla } \gamma \in (0,99; 1) \end{cases} \quad (3.9)$$

Wyniki aproksymacji powyższą funkcją zaprezentowano w tabeli 3.4 oraz na rysunku 3.4.

**Tabela 3.4**

Wartości funkcji wzbogacalności  $\lambda_2(\gamma)$

**Table 3.4**

Values of beneficiation function  $\lambda_2(\gamma)$

$\gamma$ [%] (doświadczalne)	$\lambda_2(\gamma)$ [%] (równanie 3.9)
62,47	3,60
86,46	15,84
92,64	24,10
94,93	28,95
96,59	33,99
98,34	42,97
100	49,23

Wartość średnia  $\bar{\lambda}$  zawartości popiołu w całości materiału jest wówczas zadana wzorem

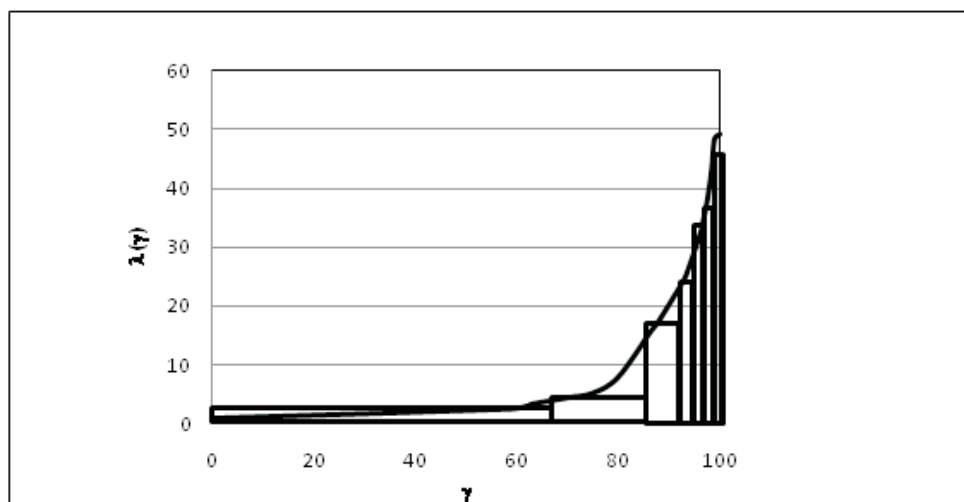
$$\bar{\lambda} = \int_0^1 \lambda(\gamma) d\gamma \quad (3.10)$$

Natomiast jeżeli  $\bar{\lambda}_i$  oznacza średnią zawartość procentową popiołu w  $i$ -tej frakcji w stosunku do całości materiału, to jest zadana wzorem:

$$\bar{\lambda}_i = \int_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} \lambda(\gamma) d\gamma \quad (3.11)$$

gdzie:  $\gamma_{i-1}$  – skumulowany wychód frakcji  $i-1$ -ej,

$\gamma_i$  – skumulowany wychód frakcji  $i$ -tej.

Rys. 3.4. Funkcja wzbogacalności Henry'ego  $\lambda_2(\gamma)$ Fig. 3.4. Henry's beneficiation function  $\lambda_2(\gamma)$ 

Na podstawie wzorów (3.9) i (3.10) otrzymuje się, że średnia zawartość popiołu w całym badanym materiale wynosi

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} = \int_0^1 \lambda(\gamma) d\gamma = & 0,026\gamma|_0^{0,51} + 0,072[\gamma \ln \gamma + (1-\gamma) \ln(1-\gamma) - 0,0045\gamma]|_{0,51}^{0,8} \\ & + 0,12[\gamma \ln \gamma + (1-\gamma) \ln(1-\gamma) - 0,55\gamma]|_{0,8}^{0,99} + 0,49\gamma|_{0,99}^1 = 7,2\% \end{aligned}$$

Natomiast jeżeli obliczy się  $\bar{\lambda}$  na podstawie wyników doświadczalnych, czyli  $\bar{\lambda} = \sum_i f_i \lambda_i$ , gdzie  $\lambda_i$  oznacza procentową zawartość popiołu w  $i$ -tej frakcji, a  $f_i$  wychód tej frakcji, to otrzymuje się, że  $\bar{\lambda} = 6,2\%$ .

Obliczając na podstawie wzoru (3.11) średnią zawartość popiołu w  $i$ -tej frakcji w stosunku do całości materiału otrzymuje się wyniki, które przedstawiono w tabeli 3.5.

Jeżeli do oceny jakości przybliżenia zastosuje się błąd średniokwadratowy  $s_r$  dla  $\lambda_i$ , to otrzymuje się, że  $s_r = 0,2\%$ .

Porównując wyniki na zawartość średnią popiołu w całym materiale (różnica wynosi 1%) oraz badając różnicę między zawartościami popiołu w poszczególnych frakcjach w stosunku do całego materiału, uzyskanymi na podstawie wyników doświadczalnych, a wynikami uzyskanymi poprzez aproksymację (błąd  $s_r = 0,2\%$ ) można przyjąć, że krzywa wzbogacalności Henry'ego dobrze opisuje przebieg tego procesu.

Przeprowadzone obliczenia można spuentować następującymi stwierdzeniami:

1. Otrzymane wyniki aproksymacji dwuwymiarowej pozwalają stwierdzić, że zaprezentowana metodyka może być z powodzeniem stosowana do aproksymacji podstawowych krzywych wzbogacalności Henry'ego, co potwierdza fakt, że średnia zawartość popiołu

Tabela 3.5

Średnie zawartości popiołu w  $i$ -tej frakcji

Table 3.5

Mean ash contents in  $i^{\text{th}}$  fraction

$\rho$ – gęstość frakcji	$\lambda_i$ – zawartość popiołu we frakcji	Wychód frakcji $f_i$	$\bar{\lambda}_i = f_i \lambda_i$ (doświadczalne)	$\bar{\lambda}_i$ teoretyczne
1,3	0,0261	0,6247	0,0163	0,0153
1,4	0,0377	0,2399	0,0090	0,0190
1,5	0,1732	0,0618	0,0107	0,0120
1,6	0,2608	0,0229	0,0060	0,0060
1,7	0,3248	0,0166	0,0053	0,0052
1,8	0,3834	0,0175	0,0067	0,0066
1,9	0,4832	0,0166	0,0080	0,0079

obliczona na podstawie wyników doświadczalnych nie różni się w znaczący sposób od wartości wyliczonej na podstawie teoretycznej krzywej Henry'ego (różnica o 1%). Ponadto różnica między średnimi zawartościami popiołu w poszczególnych frakcjach w stosunku do całego materiału, uzyskanymi na podstawie wyników doświadczalnych a wynikami teoretycznymi dla  $\lambda_2(\gamma)$  (krzywej otrzymanej na drodze obliczenia funkcji odwrotnej  $\gamma = \Phi^{-1}(\lambda)$ ) nie jest duża ( $s_r = 0,2\%$ ), co świadczy o prawidłowości stosowanej metody aproksymacyjnej. Można przyjąć, że uzyskana krzywa teoretyczna  $\lambda_2(\gamma)$  jest dobrą aproksymacją krzywej wzbogacalności Henry'ego  $\lambda = \lambda(\gamma)$ .

2. Przedstawienie w postaci analitycznej krzywej Henry'ego pozwala oszacować zawartość badanego składnika (w dowolnej frakcji badanego materiału, tzn. w dowolnym zakresie gęstości). Aproksymacja krzywą  $\lambda_1(\gamma)$  (otrzymanej na drodze kompilacji rozkładów logistycznego i GSA), ze względu na bardziej skomplikowaną postać jest mniej użyteczna praktycznie.

3. Zastosowanie metody krigingu zwyczajnego do wyznaczenia szukanych wartości interesujących parametrów badanego materiału (jak np. gęstość, czy zawartość popiołu) potwierdza możliwość stosowania tej metody w przypadku braku możliwości uzyskania danych eksperymentalnych.

### 3.2. Ocena zawartości popiołu w węglu za pomocą nieparametrycznych metod statystycznych

Węgiel wchodzący jako nadawa do procesu przerobczego jest zazwyczaj mieszaniną węgli pochodzących z różnych pokładów danej kopalni. Każdy pokład charakteryzuje się odmiennymi cechami i generuje różne typy rozkładów badanych parametrów, zatem rozkład

badanej cechy w całej partii węgla będzie mieszaniną rozkładów badanej cechy w poszczególnych pokładach (Niedoba 2005, 2007).

Założmy, że do przeróbki trafia mieszanina węgla pochodzących z  $k$  różnych pokładów, z których wydobywany jest węgiel. Określmy następujące zmienne losowe:

$X_i$  – zawartość popiołu w węglu pochodzącym z  $i$ -tego pokładu,  $i = 1, 2, \dots, k$ .

$X$  – zawartość popiołu w węglu wydobywanym w danej kopalni.

Wówczas rozkład zmiennej losowej  $X$  będzie mieszaniną rozkładów zmiennych losowych  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ .

Wobec tego dystrybuanta  $F(x)$  zmiennej losowej  $X$  przedstawia się następująco (Niedoba 2005):

$$F(x) = \sum_{i=1}^k p_i F_i(x) \quad (3.12)$$

gdzie:  $F_i(x)$  – dystrybuanta zmiennej losowej  $X_i$ ,

$p_i$  – procentowy udział węgla z  $i$ -tego pokładu w całej partii węgla.

Natomiast gęstość rozkładu zmiennej losowej  $X$  ma postać:

$$f(x) = \sum_{i=1}^k p_i f_i(x) \quad (3.13)$$

gdzie:  $f_i(x)$  – gęstość rozkładu zmiennej losowej  $X_i$ .

Zatem aby określić rozkład zmiennej losowej  $X$  wystarczy określić rozkłady zmiennych losowych  $X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ .

W tym celu, na podstawie pomiarów dla każdego z pokładów należy określić:

- średnią zawartość popiołu w węglu [%],
- średnie odchylenie standardowe  $\sigma$ ,
- udziały procentowe  $p_i$ .

Należy ponadto dopasować funkcję gęstości rozkładu zmiennych losowych  $X_i$ . Miarą dopasowania może być średnie odchylenie resztowe

$$s_r = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n [F_i(x_j) - \hat{F}_i(x_j)]^2}{n-2}} \quad (3.14)$$

gdzie:  $\hat{F}_i$  – dystrybuanta empiryczna,

$F_i$  – dystrybuanta teoretyczna,

$n$  – liczba pomiarów.

W pracy (Niedoba 2007) przedstawiono oszacowanie zawartości popiołu w węglu pochodzącym z sześciu pokładów pewnej górnośląskiej kopalni. Dane przedstawiono w tabeli 3.6.

**Tabela 3.6**

Przykładowe zestawienia procentowych udziałów węgla z sześciu pokładów w nadawie trafiającej do przerobu

**Table 3.6**

Example of juxtapositions of percentage shares of coal originated from six layers in feed directed to processing

Nr <i>i</i> -tego pokładu	Pokład 1	Pokład 2	Pokład 3	Pokład 4	Pokład 5	Pokład 6
Średnia zawartość popiołu w węglu [%]	13	12	15	14	12	15
Średnie odchylenie standardowe $\sigma$	2,2	1,5	3	4,3	3,5	1,9
M1	0	0	0,5	0	0	0,5
M2	0,5	0,5	0	0	0	0
M3	0	0,5	0,5	0	0	0
M4	0,1	0,5	0,1	0,1	0,1	0,1
M5	0,1	0,1	0,5	0,1	0,1	0,1
M6	0,2	0,2	0,2	0,2	0,1	0,1
M7	0	0,15	0,6	0	0,15	0
M8	0	0,3	0,7	0	0	0
M9	0,1	0,2	0,65	0	0,05	0

gdzie  $M_1 - M_9$  – przykładowe udziały procentowe poszczególnych pokładów.

Do estymacji funkcji gęstości  $f(x)$  zastosowano:

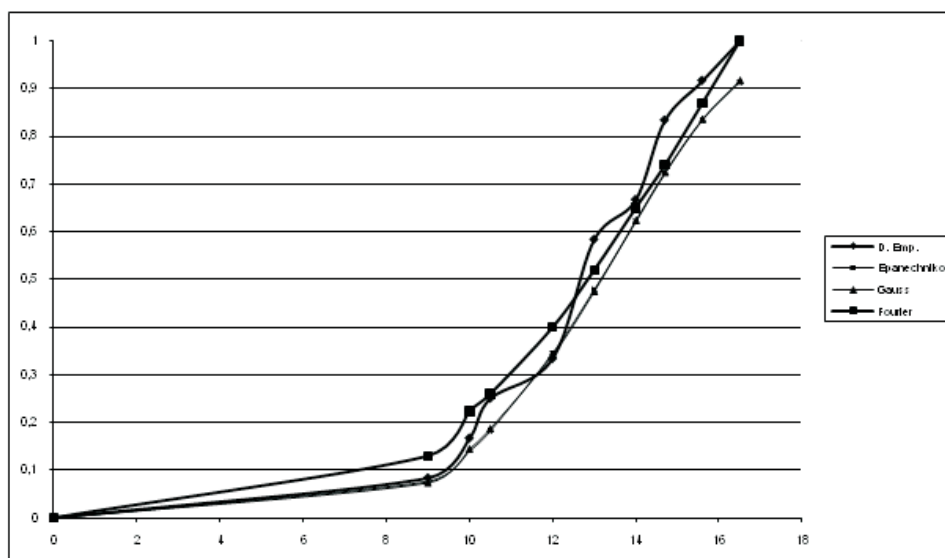
- rozkład log-normalny,
- metodę jądrową z jądrem Epanechnikowa oraz jądrem Gaussa,
- metodę Fouriera.

Wyniki dopasowania ilustruje tabela 3.7, co przedstawiono na rysunkach 3.5 i 3.6.

Dla większości pokładów najlepsze przybliżenie stanowi funkcja gęstości uzyskana metodą Fouriera, natomiast dla pokładu trzeciego najlepszy wynik daje metoda Gaussa. Analizując błędy można stwierdzić, że dopasowane rozkłady logarytmiczno-normalne w niektórych przypadkach dają lepsze wyniki niż rozkłady uzyskane metodami jądrowymi, co potwierdza celowość określania rozkładu zawartości popiołu w węglu jako rozkładu logarytmiczno-normalnego.

**Tabela 3.7**Zestawienie wyników odchyłeń resztowych  $s_r$  dla zastosowanych metod aproksymacji**Table 3.7**Juxtaposition of the results of mean squared errors  $s_r$  for the applied approximation methods

Pokład	Log-norm	Epanechnikov	Gauss	Fourier
I	0,0594	0,0809	0,0800	0,0487
II	0,0576	0,1164	0,1163	0,0422
III	0,0506	0,0472	0,0466	0,0636
IV	0,0840	0,0723	0,0702	0,0548
V	0,0511	0,0647	0,0637	0,0325
VI	0,0659	0,0608	0,0620	0,0490



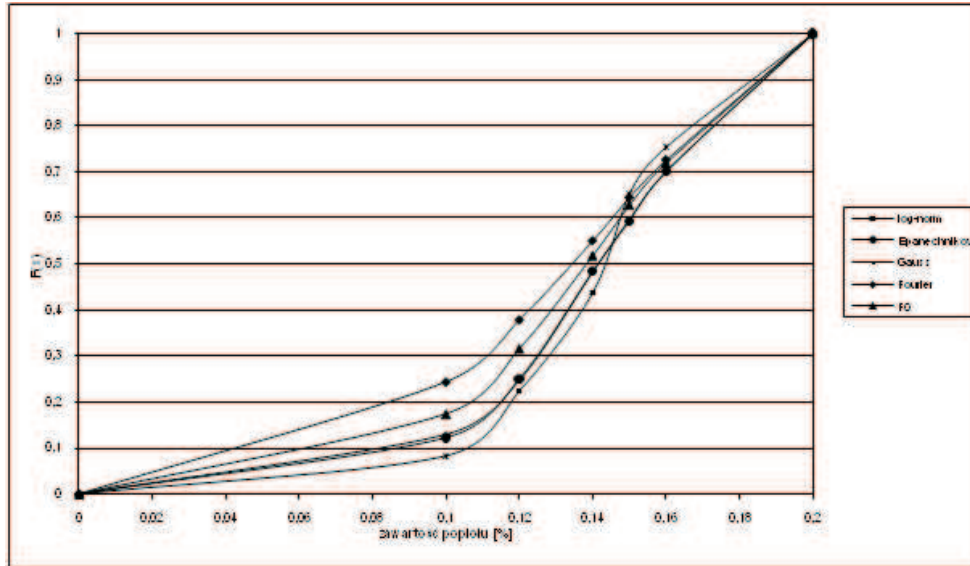
Rys. 3.5. Zestawienie aproksymant dystrybuant zawartości popiołu w węglu uzyskanych różnymi metodami dla węgla z pokładu I

Fig. 3.5. Juxtaposition of approximations of coal ash contents distribution functions obtained by various methods for coal of layer I

Na podstawie otrzymanych wyników, najlepszą aproksymację funkcji gęstości zawartości popiołu w węglu w nadawie będzie stanowić mieszanina funkcji gęstości dla poszczególnych pokładów, dla których wartość  $s_r$  jest najmniejsza, czyli

$$\hat{f}_0(x) = \sum_{i=1}^n p_i f_{i0}(x) \quad (3.15)$$

gdzie:  $f_{i0}(x)$  oznacza estymator gęstości w  $i$ -tym pokładzie, dla którego wartość  $s_r$  jest najmniejsza (Martyniak 2004; Niedoba 2004; Niedoba, Tumidajski 2006).



Rys. 3.6. Porównanie dystrybuant otrzymanych dla różnych typów aproksymacji na przykładzie mieszaniny rozkładów M5

Fig. 3.6. Comparison of distribution functions obtained for various types of approximations on the example of distribution functions mixture M5

Tabela 3.8 przedstawia prawdopodobieństwa tego, że zawartość popiołu w węglu w nadawie nie przekracza 15% dla przykładowych mieszanin podanych w tabeli 3.6, przy założeniu, że dla wszystkich pokładów funkcje gęstości były wyznaczone tą samą metodą jak i dla funkcji gęstości, będącej mieszaniną optymalnych estymatorów na danym pokładzie.

Obliczone prawdopodobieństwa różnią się w zależności od rodzaju mieszaniny. Dla rozkładu logarytmiczno-normalnego przyjmują największe wartości, ale trzeba wziąć pod uwagę, że rozkład ten nie był optymalnie dopasowany do rzeczywistego rozkładu; najbardziej prawdopodobne wartości przedstawia ostatnia kolumna. Wartości tych prawdopodobieństw można wykorzystać przy ocenie ryzyka ekonomicznego przy podejmowaniu decyzji determinujących jakość oferowanego węgla. Błędne oszacowanie jego parametrów może prowadzić do wymiernych strat finansowych, jak również obniżyć wartość produktu.

Na podstawie przeprowadzonych obliczeń można stwierdzić, że:

1. Rozkład zawartości popiołu w nadawie węgla należy rozpatrywać jako mieszaninę rozkładów tej cechy w poszczególnych pokładach.



**Tabela 3.8**

Zestawienie wartości prawdopodobieństwa, że zawartość popiołu w nadawie węgla nie przekracza 15%  
 $P(X < 15\%)$

**Table 3.8**

Juxtaposition of the probability values that the ash contents in coal feed do not exceed 15%  $P(X < 15\%)$

Typ mieszaniny	Log-norm	Epanechnikow	Gauss	Fourier	
I	0,5641	0,4704	0,4721	0,5504	0,5338
II	0,9176	0,8296	0,8326	0,9089	0,9089
III	0,7571	0,7055	0,7096	0,7742	0,7577
IV	0,8258	0,7496	0,7522	0,8248	0,8315
V	0,6519	0,5939	0,5968	0,6442	0,6277
VI	0,7383	0,6601	0,6641	0,6887	0,6821
VII	0,6734	0,6263	0,6304	0,6685	0,6488
VIII	0,6702	0,6276	0,6319	0,6839	0,6608
IX	0,6725	0,6249	0,6290	0,6762	0,6547

2. Zastosowanie nieparametrycznych metod estymacji pozwala bardziej precyzyjnie określić funkcję gęstości niż w przypadku założenia, że rozkład badanej cechy należy do rodziny rozkładów zadanych z góry (np. rozkład logarytmiczno-normalny).

3. W poszczególnych pokładach nie zawsze ta sama metoda daje optymalny, możliwy efekt, dlatego celowe jest zastosowanie funkcji gęstości mieszaniny optymalnych estymatorów dla poszczególnych frakcji.

4. Metody nieparametrycznej estymacji pozwalają dokładniej określić prawdopodobieństwo ryzyka ekonomicznego, związanego z założeniem określonej jakości węgla.

### 3.3. Aproksymacja krzywych składu ziarnowego za pomocą bayesowskich estymatorów parametrów w rozkładzie Weibulla

W wielu badaniach mających na celu porównanie efektów rozdrabniania przeprowadza się aproksymację otrzymywanych krzywych składu ziarnowego. Do najbardziej znanych wzorów aproksymujących krzywe składu ziarnowego należą funkcje rozkładu logarytmiczno-normalnego, Weibulla (RRB), Gaudina-Andrejewa-Schuhmanna (GAS) oraz rozkładu uciętego Weibulla. Podstawową metodą wyznaczania parametrów występujących we wzorach funkcji aproksymujących krzywą składu ziarnowego jest linearyzacja tych wzorów i zastosowanie metody najmniejszych kwadratów. Jednakże estymatory parametrów uzyskane tą drogą są często estymatorami obciążonymi. Należy również podkreślić, że krzywa uzyskana po linearyzacji metodą najmniejszych kwadratów minimalizuje sumę

$\sum_i (w_i - (au_i + b))^2$ , gdzie  $w_i, u_i$  oznaczają wartości nowych zmiennych po linearyzacji, natomiast nie minimalizuje sumy  $\sum_i (y_i - \Phi(x_i))^2$ , gdzie krzywa  $y = \Phi(x)$  jest szukaną krzywą.

W podrozdziale tym zajmiemy się wyznaczeniem estymatorów parametrów występujących w rozkładzie Weibulla, za pomocą linearyzacji oraz metodami bayesowskimi (Box, Tiao 1992; Domański, Pruska 2000; Grabski, Jaźwiński 2001; Krzyśko 1997; Niedoba 2003b).

W modelu teoretycznym, do opisu krzywej składu ziarnowego stosuje się dystrybuanty rozkładu Weibulla (RRB), o równaniu (Tumidajski 1993):

$$\Phi(d) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{d}{d_0}\right)^c\right] \quad (3.16)$$

gdzie:  $d$  – średnica ziarna,  
 $c$  – parametr kształtu,  
 $d_0$  – parametr skali.

Funkcja (3.16) w układzie  $\left(\ln d; \ln \ln \frac{1}{1-\Phi}\right)$  przyjmuje postać liniową  $y = ax + b$  i jej parametry można oszacować metodą najmniejszych kwadratów, gdzie  $x = \ln d$ ,  $y = \ln \ln \frac{1}{1-\Phi}$ ,  $a = c$ ,  $b = -n \ln d_0$ .

Funkcja gęstości rozkładu Weibulla ma postać:

$$f(d) = \frac{c}{d_0^c} d^{c-1} \exp\left[-\left(\frac{d}{d_0}\right)^c\right] \quad \text{dla } d \geq 0 \quad (3.17)$$

Wartość średnia zmiennej o rozkładzie Weibulla zadana jest wzorem (Grabski, Jaźwiński 2001; Stanisław 2007; Tumidajski 1993):

$$m = E(D) = d_0 \Gamma\left(\frac{1}{c} + 1\right) \quad (3.18)$$

gdzie:  $\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$  jest funkcją gamma.

Stąd otrzymujemy, że:

$$d_0 = \frac{m}{\Gamma\left(\frac{1}{c} + 1\right)} \quad (3.19)$$

Po podstawieniu do wzoru (3.17) otrzymujemy:

$$f(d) = \frac{c\alpha^c}{m^c} d^{c-1} \exp\left[-\left(\frac{d\alpha}{m}\right)^c\right] \quad (3.20)$$

gdzie:  $\alpha = \Gamma\left(\frac{1}{c} + 1\right)$ .

Niech  $(d_1, \dots, d_n)$  oznacza realizację próbki losowej. Funkcja wiarygodności odpowiadająca danej próbce losowej ma postać

$$f(d|c, m) = f(d_1; c, m) \cdot f(d_2; c, m) \cdot \dots \cdot f(d_n; c, m)$$

czyli

$$f(d|c; m) = \frac{c^n \alpha^{nc}}{m^{nc}} \cdot \beta^{c-1} \exp\left[-\left(\frac{\alpha}{m}\right)^c \cdot \gamma\right] \quad (3.21)$$

gdzie:  $\beta = d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_n, \gamma = \sum_{i=1}^n d_i^c$

Założmy, że wartość średnia  $m$  ma przy danej wartości parametru  $c$  rozkład o gęstości  $g_1(m|c)$ , natomiast parametr  $c$  ma rozkład o gęstości  $g_2(c)$ . Na podstawie twierdzenia Bayesa, łączny rozkład parametrów  $(m, c)$ , przy próbce losowej  $d$  ma postać

$$g(m, c|d) = \frac{f(d|m, c)g_1(m|c) \cdot g_2(c)}{\int_{\Omega} \int f(d|m, c)g_1(m|c)g_2(c)dm dc} \quad (3.22)$$

gdzie:  $\Omega$  oznacza obszar zmienności parametrów  $m$  i  $c$ .

Dla kwadratowej funkcji strat, bayesowski estymator parametru  $m$  wyraża się wzorem

$$\hat{m} = E(m|d) = \int_{\Omega} \int mg(m, c|d)dm dc \quad (3.23)$$

Przyjmując różne rozkłady *a priori* parametrów  $m$  i  $c$ , możemy wyznaczyć ich estymatory bayesowskie. W pracy przyjęto, że parametr  $c$  jest znany (wartość parametru  $c$  oszacowano za pomocą linearyzacji funkcji Weibulla).

Jako rozkład *a priori* parametru  $m$  przyjęto rozkład trójkątny dany wzorem:

$$g_1(m) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon^2} (m - m_0 + \varepsilon) & \text{jeżeli } m \in (m_0 - \varepsilon, m_0) \\ -\frac{1}{\varepsilon^2} (m - m_0 - \varepsilon) & \text{jeżeli } m \in (m_0, m_0 + \varepsilon) \end{cases} \quad (3.24)$$

$$\text{gdzie: } m_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i, \quad \varepsilon = \frac{u_p s}{\sqrt{n}}, \quad s^2 = \frac{1}{n} \sum (d_i - m_0)^2$$

$u_p$  – kwantyl rozkładu normalnego.

Po podstawieniu do wzoru (3.22) otrzymujemy, że

$$g(m|d; c) = \frac{f(d; c|m)g_1(m)}{\int_{m_0-\varepsilon}^{m_0+\varepsilon} f(d; c|m)g_1(m)dm} \quad (3.25)$$

Natomiast bayesowski estymator parametru  $m$  ma postać

$$\hat{m} = \int_{m_0-\varepsilon}^{m_0+\varepsilon} m g(m|d; c) dm$$

skąd

$$\hat{m} = \frac{\int_{m_0-\varepsilon}^{m_0+\varepsilon} m f(d; c|m) g_1(m) dm}{\int_{m_0-\varepsilon}^{m_0+\varepsilon} f(d; c|m) g_1(m) dm} \quad (3.26)$$

Wstawiając równania (3.21) i (3.24) do (3.26), po prostych przekształceniach otrzymujemy

$$\hat{m} = \frac{\int_{m_0-\varepsilon}^{m_0+\varepsilon} c^n \frac{1}{m^{cn-1}} e^{-\frac{\alpha^c}{m^c}} u(m)(m - m_0 + \varepsilon u(m)) dm}{\int_{m_0-\varepsilon}^{m_0+\varepsilon} \frac{1}{m^{vn}} e^{-\frac{\alpha^c}{m^c}} u(m)(m - m_0 + \varepsilon u(m)) dm} \quad (3.27)$$

$$\text{gdzie: } u(m) = \begin{cases} 1 & \text{dla } m \leq m_0 \\ -1 & \text{dla } m > m_0 \end{cases}$$

Dla celów testowania różnego sposobu aproksymacji krzywych składu ziarnowego produktów kruszenia, wykonano proces kruszenia porfiru (w kruszarce szczękowej) i dokonano aproksymacji parametrów rozkładu Weibulla poprzez linearyzację oraz za pomocą metody bayesowskiej (Box, Tiao 1992; Domański, Pruska 2000; Grabski, Jaźwiński 2001) porównano efekty aproksymacji. Obliczeń dokonano za pomocą pakietu STATISTICA PL (Stanisz 2007) oraz programu Microsoft Excel. Pomocne były też tablice statystyczne (Zieliński 1972).

Jako miernik dopasowania przyjęto odchylenie resztowe (błąd średnio kwadratowy) o wzorze

$$s_r = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Phi_t(d_i) - \Phi_\tau(d_i))^2}{k-2}} \quad (3.28)$$

gdzie:  $\Phi_t(d_i)$  – dystrybuanta teoretyczna Weibulla,  
 $\Phi_\tau(d_i)$  – dystrybuanta empiryczna,  $k$  – liczba klas.

Badany materiał – porfir, poddano 10-stadialnemu procesowi kruszenia. Dla każdego z etapów dokonywano analizy składu ziarnowego oraz aproksymowano go za pomocą rozkładu Weibulla. Do badań wybrano trzy etapy kruszenia, dla których aproksymacja rozkładem Weibulla, otrzymanym metodą linearyzacji, nie dawała zadowalających efektów.

W wybranych, kolejnych kruszeniach warunki rozdrabniania przedstawiały się następująco:

II – porfir o klasie (20, 25) mm, 5 kg, kruszarka szczękowa wypustowa 11 mm (w kolejnych kruszeniach, nadawą był produkt z poprzedniego kruszenia).

III – kruszarka szczękowa, szczelina wypustowa 4,4 mm.

IV – kruszarka szczękowa, szczelina wypustowa 2 mm.

Wyniki aproksymacji zestawiono w tabelach 3.9–3.11 oraz na rysunkach 3.7–3.9.

Do sprawdzenia jakości aproksymacji wybrano te poziomy kruszenia, dla których krzywa Weibulla, wyznaczona za pomocą linearyzacji nie była najlepiej dopasowana. Za każdym razem estymatory bayesowskie dawały lepsze dopasowanie. Zasadnym jest więc zastanowienie się nad stosowaniem tej metody estymacji parametrów rozkładów przy określaniu teoretycznych krzywych składu ziarnowego, jak i rozkładów innych wielkości charakteryzujących materiał uziarniony.

**Tabela 3.9**

Poziom 1 kruszenia

**Table 3.9**

Level I of crushing

$d_i$	$n_i$ [%]	$\bar{d}_i$	$\Phi_r(d)$	$\Phi_{t_1}(d)$	$\Phi_{t_2}(d)$
0–5	10,05	2,5	10,05	7,15	7,89
5–6,3	1,94	5,65	11,99	11,41	12,55
6,3–8	2,52	7,15	14,42	18,21	16,56
8–10	6,01	9	20,43	22,74	24,88
10–12,5	13,16	11,25	33,59	33,91	36,78
12,5–16	26,92	14,25	60,51	49,52	62
16–18	9,42	17	69,93	67,43	71,12
18–20	14,40	19	84,33	75,40	78,83
20–25	15,58	22,5	99,91	89,47	91,73

gdzie:  $\Phi_r(d)$  – dystrybuanta empiryczna,  $\Phi_{t_1}(d)$  – dystrybuanta rozkładu Weibulla, przy parametrach wyznaczonych przez linearyzację,  $\Phi_{t_2}(d)$  – dystrybuanta rozkładu Weibulla, gdzie parametry rozkładu zastąpiono estymatorami bayesowskimi.

**Tabela 3.10**

Estymatory parametrów rozkładu Weibulla

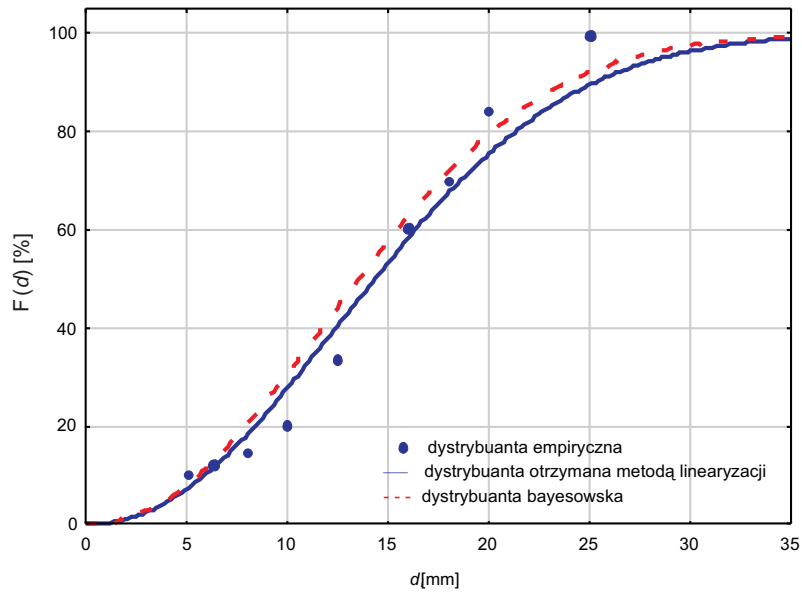
**Table 3.10**

Estimators of Weibull distribution function

	Estymatory wyznaczone przy pomocy linearyzacji		Estymatory bayesowskie	
	$c$	$d_0$	$c$	$d_0$
Poziom I	2,12	17,05	2,12	16,12
Poziom II	1,49	6,03	1,49	5,48
Poziom III	1,31	3,38	1,31	2,62

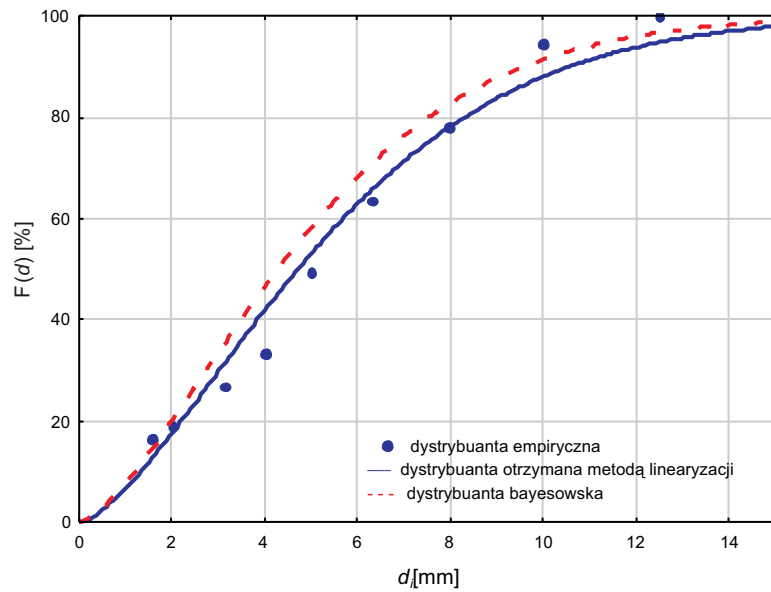
**Tabela 3.11**Średnie błędy resztowe  $s_r$ **Table 3.11**Mean squared errors  $s_r$ 

	Metoda linearyzacji	Metoda bayesowska
Poziom I	5,49	4,47
Poziom II	4,98	3,75
Poziom III	8,04	4,13



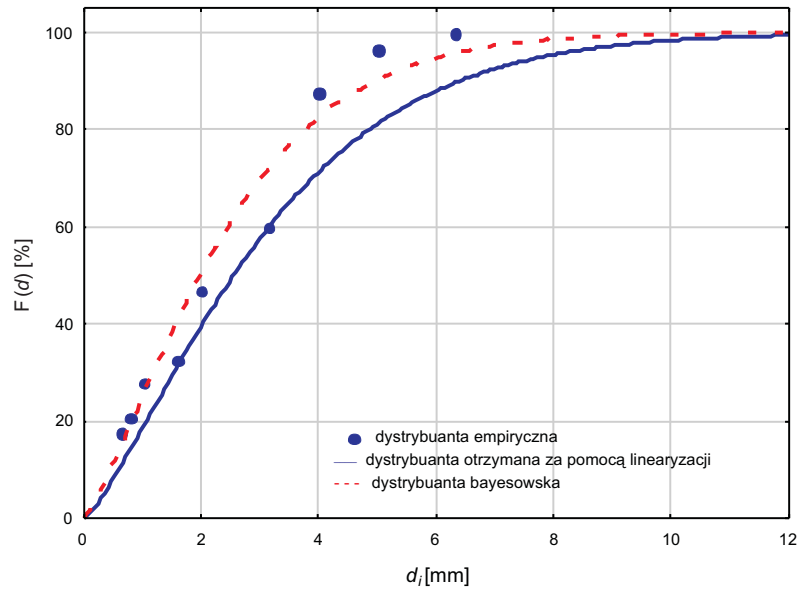
Rys. 3.7. Zestawienie dystrybuant składu ziarnowego porfiru, otrzymanych różnymi metodami – I poziom kruszenia

Fig. 3.7. Juxtaposition of porphyry particle size distribution functions obtained by various methods – 1<sup>st</sup> stage of crushing



Rys. 3.8. Zestawienie dystrybuant składu ziarnowego porfiru, otrzymanych różnymi metodami – II poziom kruszenia

Fig. 3.8. Juxtaposition of porphyry particle size distribution functions obtained by various methods – 2<sup>nd</sup> stage of crushing



Rys. 3.9. Zestawienie dystrybuant składu ziarnowego porfiru, otrzymanych różnymi metodami – III poziom kruszenia

Fig. 3.9. Juxtaposition of porphyry particle size distribution functions obtained by various methods – 3<sup>rd</sup> stage of crushing



### 3.4. Wielowymiarowa analiza właściwości materiałów uziarnionych

W wielu procesach rozdziału o skuteczności procesu decyduje więcej niż jedna cecha (np. przy wzbogacaniu grawitacyjnym, czy klasyfikacji przepływowej). Zatem wydaje się zasadnym badanie wielowymiarowych rozkładów właściwości materiału poddawanego procesowi. Takie podejście jest stosunkowo nowe i literatura na ten temat jest raczej skromna (Tumidajski 1997; Niedoba, Tumidajski 2008, 2010; Niedoba 2009, 2011, 2012; Niedoba, Surowiak 2012; Lyman 1993).

W przypadku węgla najbardziej interesujące dla badacza procesów przerobczych są zależności opisujące związek między wielkością ziarna  $D$ , jego gęstością  $P$  oraz średnią zawartością popiołu, tzn. dystrybuanta  $F(d, \rho)$  oraz funkcja wzbogalności  $\lambda(d, \rho)$  (Spottiswood, Kelly 1992).

W pracy (Niedoba 2013) badano rozdział węgla typu 31 (patrz załącznik), pochodzącego z jednej z górnośląskich kopalń. Rozdziału dokonywano na podstawie wielkości ziarna  $D$  oraz jego gęstości  $P$ . Wyniki rozdziału przedstawiono w tabeli 3.12. Suma wszystkich udziałów równa się 100%.

**Tabela 3.12**

Rozkład (wagowy w [%]) klasofrakcji opisujących wielkość ziaren i ich gęstość

**Table 3.12**

Distribution (weight [%]) of size and density fractions describing particle size and their density

Klasa ziarnowa $d_{i-1} - d_i$ [mm]	Frakcja gęstościowa $\rho_{j-1} - \rho_j$ [g/cm <sup>3</sup> ]						
	0–1,3	1,3–1,4	1,4–1,5	1,5–1,6	1,6–1,7	1,7–1,8	1,8–1,9
0–1,00	12,32	2,93	0,47	0,12	0,05	0,40	0,13
1,00–3,15	20,15	4,84	1,25	0,42	0,45	0,39	0,30
3,15–6,30	16,47	8,53	1,38	0,46	0,44	0,42	0,35
6,30–8,00	4,19	1,74	0,32	0,12	0,11	0,12	0,16
8,00–10,00	2,14	1,48	0,34	0,20	0,12	0,07	0,17
10,00–12,50	3,06	1,89	0,64	0,27	0,22	0,18	0,16
12,50–14,00	1,25	1,18	0,14	0,04	0,10	0,06	0,06
14,00–16,00	1,66	0,48	0,84	0,39	0,09	0,03	0,05
16,00–20,00	1,23	0,92	0,79	0,27	0,08	0,10	0,26

Na podstawie wyników określono dystrybuanty empiryczne rozkładów brzegowych  $F_1(d)$  i  $F_2(\rho)$ , jak również łączną dystrybuantę  $F_0(d, \rho)$ . Następnie dokonano aproksymacji rozkładów brzegowych:

- dla zmiennej losowej  $D$  zastosowano rozkład Weibulla o dystrybuancie zadanej wzorem:

$$\Phi_1(d) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{d}{d_0}\right)^c\right], \quad d \geq 0 \quad (3.29)$$

gdzie:  $d_0, c$  – parametry;

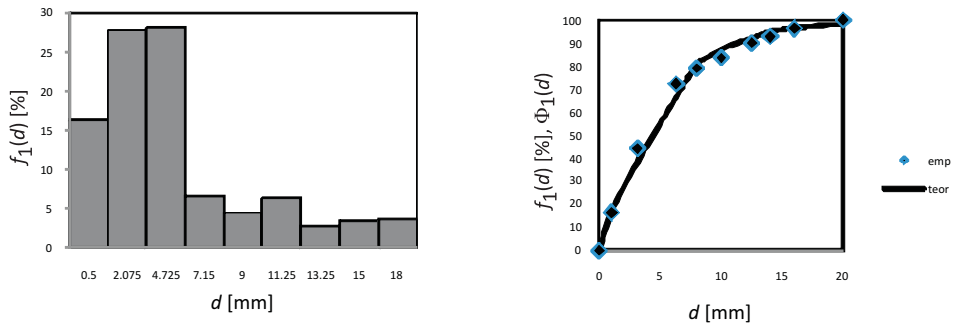
— dla zmiennej losowej P rozkład logistyczny cenzurowany

$$\Phi_2(\rho) = \frac{1}{1 + b \exp\left[-c\left(\frac{\rho}{\rho_{\max} - \rho}\right)\right]} \quad (3.30)$$

gdzie:  $b, c$  – parametry.

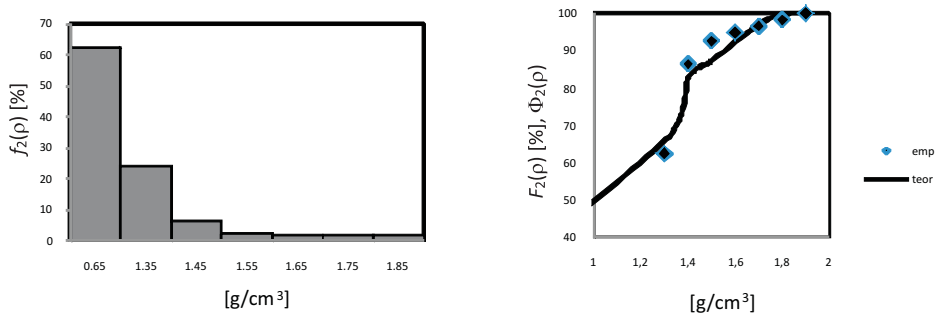
Dopasowania dystrybuant teoretycznych (3.29) i (3.30) dokonano metodą najmniejszych kwadratów, uprzednio linearyzując te wzory.

Jakość dopasowania tych funkcji ilustrują rysunki 3.10 i 3.11.



Rys. 3.10. Rozkład wielkości ziaren węgla, a) histogram , b) dystrybuanta

Fig. 3.10. Particle size distribution for coal, a) histogram , b) distribution function



Rys. 3.11. Rozkład gęstości węgla, a) histogram, b) dystrybuanta

Fig. 3.11. Particle density distribution for coal, a) histogram, b) distribution function

### 3.4.1. Dystrybuanty rozkładów dwuwymiarowych zmiennych losowych

Aby określić związek pomiędzy wielkością ziarna a jego gęstością w przypadku badanego węgla konieczna jest dwuwymiarowa analiza. Do tego celu pomocna będzie tabela skumulowanego rozkładu klasofrakcji (tab. 3.13), otrzymana na drodze przekształcenia tabeli 3.12, czyli

**Tabela 3.13**

Skumulowany udział (%) różnych klas ziarnowych  $d_i$  i frakcji gęstościowych  $\rho_j$  w nadawie węgla

**Table 3.13**

Accumulated share (weight [%]) of various particle size fractions  $d_i$  and density fractions  $\rho_j$  in coal feed

$d_{i-1} - d_i$ \ $\rho_{j-1}, \rho_j$	0-1,3	1,3-1,4	1,4-1,5	1,5-1,6	1,6-1,7	1,7-1,8	1,8-1,9
0-1,00	12,32	15,25	15,72	15,84	15,89	16,30	16,42
1,00-3,15	32,47	40,24	41,90	42,49	42,99	43,77	44,23
3,15-6,30	48,94	62,54	68,34	69,34	70,27	71,47	72,28
6,30-8,00	53,13	71,15	74,57	75,69	76,73	78,04	79,05
8,00-10,00	55,26	74,77	78,53	79,85	81,02	82,41	83,55
10,00-12,50	58,32	79,72	84,12	85,70	87,09	88,66	89,98
12,50-14,00	59,57	82,15	86,70	88,33	89,92	91,45	92,80
14,00-16,00	61,23	84,29	89,68	91,71	93,29	94,95	96,32
16,00-20,00	62,46	86,46	92,64	94,93	96,59	98,34	100

Najprostszym sposobem aproksymacji dwuwymiarowej dystrybuanty  $F_0(d, \rho)$  jest jej prezentacja jako iloczynu dwóch dystrybuant dla zmiennych losowych  $D$  i  $P$ , co oznacza, że (Fisz 1969; Hahn, Shapiro 1994)

$$F_3(d, \rho) = \frac{F_1(d)F_2(\rho)}{100} \quad (3.31)$$

Wyniki dla dystrybuanty  $F_3(d, \rho)$  przedstawiono w tabeli 3.14.

Aby określić błąd aproksymacji zastosowano średni błąd kwadratowy  $s_r$  (Dobosz 2001)

$$s_r = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l (F_3(d_i, \rho_j) - F_0(d_i, \rho_j))^2}{N-2}} \quad (3.32)$$

Tabela 3.14

Wyniki dla dystrybuanty  $F_3(d, \rho)$ 

Table 3.14

Results for distribution function  $F_3(d, \rho)$ 

$d_{i-1} - d_i$ \ $\rho_{j-1}, \rho_j$	0-1,3	1,3-1,4	1,4-1,5	1,5-1,6	1,6-1,7	1,7-1,8	1,8-1,9
0-1,00	10,26	14,20	15,22	15,60	15,87	16,15	16,43
1,00-3,15	27,63	38,24	40,97	41,98	42,72	43,50	44,23
3,15-6,30	45,15	62,49	66,96	68,62	69,81	71,08	72,28
6,30-8,00	49,38	68,33	73,22	75,03	76,34	77,72	79,04
8,00-10,00	52,19	72,24	77,40	79,31	80,70	82,16	83,55
10,00-12,50	56,21	77,80	83,36	85,42	86,91	88,49	89,98
12,50-14,00	57,96	80,22	85,96	88,08	89,62	91,25	92,79
14,00-16,00	60,17	83,28	89,06	91,43	93,03	94,72	96,32
16,00-20,00	62,47	86,46	92,64	94,93	96,59	98,34	100

gdzie:  $N$  jest liczbą frakcji ( $N = 63$ ),  $F_3$  są wartościami obliczonej dystrybuanty opartej na wartościach empirycznych a  $F_0$  to wartości empirycznej dystrybuanty. W tym przypadku wartość  $s_r$  była równa 1,37%. Niska wartość błędu oznacza, że wielkość ziarna  $D$  i gęstość  $P$  mogą być niezależne od siebie, co jednak nie okazało się być prawdą. Jeżeli zamiast dystrybuant empirycznych  $F_1(d)$  i  $F_2(\rho)$  zastosuje się aproksymanty  $\Phi_1(d)$  i  $\Phi_2(\rho)$ , dane równaniami (3.29) i (3.30), funkcja  $\Phi_3(d, \rho)$  będzie dana jako:

$$\Phi_3(d, \rho) = \Phi_1(d) \Phi_2(\rho) \quad (3.33)$$

oraz

$$\Phi_3(d, \rho) = \left( 1 - \exp \left( - \left( \frac{d}{4,33} \right)^{0,978} \right) \right) \left( \frac{1}{1 + 0,66 \exp \left( -0,47 \left( \frac{\rho}{1,9 - \rho} \right) \right)} \right) \quad (3.34)$$

Wyniki dystrybuanty  $\Phi_3(d, \rho)$  zaprezentowano w tabeli 3.15.

Porównując wyniki dystrybuanty empirycznej  $F_0(d_i, \rho_j)$  oraz dystrybuanty  $\Phi_3(d_i, \rho_j)$  otrzymanej na drodze aproksymacji otrzymano wartość błędu  $s_r$  równą 4,18%. Wyższa wartość błędu jest oczywista, ponieważ błędy aproksymacji  $\Phi_1(d)$  i  $\Phi_2(\rho)$  wpływają na wynik końcowy.

Tabela 3.15

Wyniki dystrybuanty  $\Phi(d_i, \rho_j)$ 

Table 3.15

Results for distribution function  $\Phi(d_i, \rho_j)$ 

$d_{i-1} - d_i$ \ $\rho_{j-1}, \rho_j$	0-1,3	1,3-1,4	1,4-1,5	1,5-1,6	1,6-1,7	1,7-1,8	1,8-1,9
0-1,00	10,85	13,61	14,37	15,20	15,99	16,42	16,47
1,00-3,15	25,38	31,87	33,63	35,39	37,42	38,44	38,55
3,15-6,30	43,69	54,86	57,89	61,26	64,41	66,16	66,35
6,30-8,00	52,98	66,43	70,20	74,29	78,11	80,23	80,46
8,00-10,00	57,32	71,98	75,96	80,38	84,51	86,82	87,06
10,00-12,50	60,67	76,80	80,39	85,07	89,45	91,88	92,14
12,50-14,00	62,25	78,50	82,84	87,67	92,18	94,68	94,90
14,00-16,00	63,58	79,83	84,25	89,15	93,74	96,22	96,56
016,00-20,00	64,68	81,20	85,70	90,69	95,35	97,74	98,22

Inną drogą aproksymowania dystrybuanty  $F_0$  jest metoda oparta na zastosowaniu rodziny funkcji Morgensterna, która jest zadana równaniem ogólnym (3.35) (Balasubramanian, Beg 1997; Firkowicz i in. 1977; Johnson, Kotz 1972; Niedoba 2009, 2011a; Niedoba, Tumidajski 2008; Scaria, Nair 1999; Tumidajski 1997)

$$F_4(d, \rho) = F_1(d)F_2(\rho)(1 + \mu(1 - F_1(d))(1 - F_2(\rho))) \quad (3.35)$$

gdzie:  $\mu$  – stały parametr,  $\mu \in [-1, 1]$ .

Przy zastosowaniu metody najmniejszych kwadratów (Firkowicz i in. 1977), poprzez minimalizację funkcji  $L(\mu) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (F_4(d_i, \rho_j) - F_0(d_i, \rho_j))^2$ , przy warunku, że  $\mu \in [-1, 1]$

możliwe jest obliczenie wartości  $\mu$

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^k (F_0(d_i, \rho_j) - F_1(d_i)F_2(\rho_j))F_1(d_i)F_2(\rho_j)(1 - F_1(d_i))(1 - F_2(\rho_j))}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^k (F_1^2(d_i, \rho_j)F_2^2(d_i, \rho_j)(1 - F_1(d_i))^2(1 - F_2(\rho_j))^2)} \quad (3.36)$$

Na podstawie danych empirycznych wyznaczono wartość  $\mu = 1$  co oznacza, że równanie dystrybuanty zadane jest wzorem

$$F_4(d, \rho) = F_1(d)F_2(\rho)(1 + (1 - F_1(d))(1 - F_2(\rho))) \quad (3.37)$$

Wyniki aproksymacji z użyciem  $F_4(d, \rho)$  zostały zaprezentowane w tabeli 3.16.

Tabela 3.16

Wyniki dystrybuanty  $F_4(d, \rho)$

Table 3.16

Results of distribution function  $F_4(d, \rho)$

$d_{i-1} - d_i$	$\rho_{j-1}, \rho_j$	0–1,3	1,3–1,4	1,4–1,5	1,5–1,6	1,6–1,7	1,7–1,8	1,8–1,9
0–1,00		13,48	15,81	16,15	16,26	16,32	16,39	16,43
1,00–3,15		33,41	41,12	42,65	43,16	43,53	43,89	44,23
3,15–6,30		49,85	64,83	68,32	69,57	70,96	71,40	72,28
6,30–8,00		53,26	70,27	74,20	75,83	76,89	78,00	79,04
8,00–10,00		55,41	73,84	78,34	79,97	81,15	82,39	83,55
10,00–12,50		58,32	78,85	83,97	85,85	87,20	88,63	89,98
12,50–14,00		59,53	81,00	86,42	88,40	89,84	91,35	92,79
14,00–16,00		61,00	83,69	89,47	91,61	93,15	94,78	96,32
16,00–20,00		62,43	86,46	92,64	94,93	96,59	99,35	100

Wynik błędu aproksymacji za pomocą funkcji  $F_4(d, \rho)$ , przy użyciu funkcji Morgensterna okazał się być równy wartości 0,52%. Zatem zastosowanie dystrybuanty Morgensterna dało lepsze wyniki aproksymacji w porównaniu do metody opartej na prostym iloczynie. Oznacza to, że istnieje istotny związek pomiędzy wielkością ziarna  $d_i$  i gęstością  $\rho_j$ . Jeżeli zamiast wartości empirycznych zastosuje się aproksymanty  $\Phi_1(d)$  oraz  $\Phi_2(\rho)$ , to wartość parametru  $\mu$  jest nadal równa 1. Równanie funkcji  $\Phi_4(d, \rho)$  jest wówczas zadane wzorem

$$\Phi_4(d, \rho) = \Phi_1(d)\Phi_2(\rho)(1 + (1 - \Phi_1(d))(1 - \Phi_2(\rho))) \quad (3.38)$$

Wartości dystrybuanty  $\Phi_4(d, \rho)$  podano w tabeli 3.17.

W tym przypadku wartość  $s_r$  była równa 3,5 %. Jest to wartość mniejsza w porównaniu do aproksymacji funkcją  $\Phi_3(d, \rho)$ . Oznacza to także, że wielkość ziarna i jego gęstość są od siebie zależne.

Porównanie wszystkich aproksymacji zaprezentowano na rysunku 3.12 (na wklejce).

Na podstawie powyższych rozważań można stwierdzić, że jedynie wielowymiarowa analiza statystyczna może dać wystarczająco pełną informację na temat związków poszczególnych cech materiału uziarnionego. Oprócz klasycznych metod statystycznych możliwe jest zastosowanie wielu innych technik, np. rodzina funkcji Morgensterna z zasto-

Tabela 3.17

Wartości dystrybuanty  $\Phi_4(d_i, \rho_j)$ 

Table 3.17

Results of distribution function  $\Phi_4(d_i, \rho_j)$ 

$d_{i-1} - d_i \backslash \rho_{j-1}, \rho_j$	0-1,3	1,3-1,4	1,4-1,5	1,5-1,6	1,6-1,7	1,7-1,8	1,8-1,9
0-1,00	13,94	15,58	15,90	16,18	16,38	16,46	16,47
1,00-3,15	30,71	32,27	36,27	37,27	38,09	38,51	38,55
3,15-6,30	48,71	58,06	60,37	62,84	65,05	66,23	66,35
6,30-8,00	56,52	68,77	71,95	75,40	78,56	80,28	80,46
8,00-10,00	59,86	73,59	77,21	81,18	84,84	86,85	87,06
10,00-12,50	62,30	77,21	81,19	85,59	89,65	91,90	92,14
12,50-14,00	63,53	79,11	83,29	87,91	92,91	94,59	94,85
14,00-16,00	64,33	80,31	84,61	89,39	93,83	96,30	96,56
16,00-20,00	65,07	81,45	86,31	90,81	95,40	97,95	98,22

sowaniem parametrycznych lub nieparametrycznych rozkładów brzegowych. Oprócz takich cech jak wielkość i gęstość ziarna można brać pod uwagę także inne cechy, jak np. zawartość popiołu, czy zawartość siarki, które również znacząco wpływają na jakość analizowanego materiału.

### 3.4.2. Zastosowanie nieparametrycznych metod statystycznych

Nie zawsze rozkłady parametryczne dają zadowalającą zgodność z danymi empirycznymi. W takim przypadku można zastosować nieparametryczne metody statystyczne, tzn. metodę Fouriera lub/i metodę jądrową. W pracy (Niedoba 2009) badano rozdział węgla pochodzącego z jednej z kopalń Górnego Śląska. Rozdział ten został dokonany na podstawie wielkości ziaren i ich gęstości.

Wyniki rozdziału materiału przedstawiono w tabelach 3.18 i 3.19.

Za pomocą metody najmniejszych kwadratów wyznaczono optymalne  $\mu$  w rozkładzie Morgensterna i otrzymano dystrybuantę zmiennej  $(D, P)$  z poprawką Morgensterna w postaci

$$F(d, \rho) = F_1(d)F_2(\rho)(1 - 0,26(1 - F_1(d))(1 - F_2(\rho))) \quad (3.39)$$

Do aproksymacji funkcji  $F_1(d)$  (dystrybuanty zmiennej losowej  $D$ ) zastosowano metodę jądrową z jądrem Gaussa.

**Tabela 3.18**Empiryczna funkcja gęstości  $f(d, \rho)$  i gęstości brzegowe  $f_1(d)$  i  $f_2(\rho)$ **Table 3.18**Empirical statistical density function  $f(d, \rho)$  and marginal statistical density functions  $f_1(d)$  and  $f_2(\rho)$ 

$\rho \backslash d$	2	3,2	4	5	6,3	10	12,5	16	18	20	suma
1,26	0,0004	0,0004	0,0003	0,0004	0,0005	0,0021	0,001	0,0008	0,0005	0,0003	0,0067
1,3	0,0352	0,0283	0,0205	0,025	0,0343	0,0894	0,0407	0,0354	0,0109	0,0151	0,3348
1,35	0,0516	0,0551	0,0388	0,0494	0,059	0,1271	0,0536	0,0445	0,0127	0,0182	0,51
1,4	0,0048	0,0048	0,0039	0,0061	0,008	0,0171	0,0081	0,003	0,0021	0,0029	0,0608
1,45	0,003	0,0028	0,002	0,0026	0,0032	0,0068	0,0031	0,0025	0,0008	0,0011	0,0279
1,5	0,0017	0,0016	0,0011	0,0014	0,0017	0,0034	0,0015	0,0014	0,0003	0,0005	0,0146
1,6	0,0017	0,0013	0,0009	0,001	0,0011	0,0024	0,0012	0,0009	0,0004	0,0004	0,0113
1,8	0,0013	0,0011	0,0008	0,0008	0,001	0,002	0,0008	0,0006	0,0003	0,0002	0,0089
2	0,0007	0,0005	0,0004	0,0003	0,0004	0,0007	0,0003	0,0002	0,0001	0,0001	0,0037
2,2	0,0035	0,0027	0,0018	0,0019	0,0023	0,0048	0,0019	0,0014	0,0004	0,0006	0,0213
suma	0,1039	0,0986	0,0705	0,0889	0,1115	0,2558	0,1122	0,0907	0,0285	0,0394	

**Tabela 3.19**Dystrybuanta empiryczna  $F(d, \rho)$  i dystrybuanty brzegowe  $F_1(d)$  i  $F_2(\rho)$ **Table 3.19**Empirical distribution function  $F(d, \rho)$  and marginal distribution functions  $F_1(d)$  and  $F_2(\rho)$ 

$\rho \backslash d$	2	3,2	4	5	6,3	10	12,5	16	18	20
1,26	0,0004	0,0008	0,0011	0,0015	0,002	0,0041	0,0051	0,0059	0,0064	0,0067
1,3	0,0356	0,0643	0,0851	0,1105	0,1453	0,2368	0,2785	0,3147	0,3261	0,3415
1,35	0,0872	0,171	0,2306	0,3054	0,3992	0,6178	0,7131	0,7938	0,8179	0,8515
1,4	0,092	0,1806	0,2441	0,325	0,4268	0,6625	0,7659	0,8496	0,8758	0,9123
1,45	0,095	0,1864	0,2519	0,3354	0,4404	0,6829	0,7894	0,8756	0,9026	0,9402
1,5	0,0967	0,1897	0,2563	0,3412	0,4479	0,6938	0,8018	0,8894	0,9167	0,9548
1,6	0,0984	0,1927	0,2602	0,3461	0,4539	0,7022	0,8114	0,8999	0,9276	0,9661
1,8	0,0997	0,1951	0,2634	0,3501	0,4589	0,7092	0,8192	0,9083	0,9363	0,975
2	0,1004	0,1963	0,265	0,352	0,4612	0,7122	0,8225	0,9118	0,9399	0,9787
2,2	0,1039	0,2025	0,273	0,3619	0,4734	0,7292	0,8414	0,9321	0,9606	1



Otrzymano następującą postać dystrybuanty:

$$F_1(d) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i \Phi\left(\frac{d-d_i}{2,14}\right) \quad (3.40)$$

gdzie:  $n_i$  – udział  $i$ -tej klasy ziarnowej,  
 $k$  – ilość klas.

Wyniki aproksymacji zawarto w tabeli 3.20.

**Tabela 3.20**

Wyniki aproksymacji dystrybuanty  $F_1(d)$

**Table 3.20**

Results of approximation of distribution function  $F_1(d)$

$d_i$ [mm]	$n_i$	$F_{emp}$ [%]	$F_{teor}$ [%]
<2	10,39	10,39	9,48
<3,2	9,86	20,25	17,29
<4,0	7,05	27,30	22,99
<5,0	8,89	36,19	30,73
<6,3	11,15	47,34	41,52
<10,0	25,58	72,92	71,37
<12,5	11,22	84,14	86,57
<16	9,07	93,21	90,71
<18	2,85	96,06	95,23
<20	3,94	100	100

Jako miarę dopasowania rozkładu zastosowano błąd średniokwadratowy

$$s_r = \sqrt{\frac{\sum (F_{emp}(d_i) - F_{teor}(d_i))^2}{n-2}}$$

Przy aproksymacji funkcją jądrową Gaussa uzyskano błąd  $s_r = 3,62\%$ . Wynik aproksymacji zobrazowano na rysunku 3.13 (na wklejce).

Dla aproksymacji dystrybuanty zmiennej P (gęstości ziaren) posłużono się metodą Fouriera.

Dystrybuanta ma wówczas postać

$$F_2(\rho) = \frac{\rho - 1,26}{0,94} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left( \begin{aligned} &1,18 \sin \pi \frac{\rho - 1,26}{0,94} + 0,06405 \sin 2\pi \frac{\rho - 1,26}{0,94} + 0,2791 \sin 3\pi \frac{\rho - 1,26}{0,94} + \\ &+ 0,1554 \sin 4\pi \frac{\rho - 1,26}{0,94} + 0,0449 \sin 5\pi \frac{\rho - 1,26}{0,94} \end{aligned} \right) \quad (3.41)$$

Wyniki aproksymacji przedstawione są w tabeli 3.21 oraz na rysunku 3.14 (na wklejce).

**Tabela 3.21**

Wyniki aproksymacji dystrybuanty  $F_2(\rho)$

**Table 3.21**

Results of approximation of distribution function  $F_2(\rho)$

$\rho_j$ [g/cm <sup>3</sup> ]	$n_j$	$F_{emp}$ [%]	$F_{teor}$ [%]
<1,26	0,67	0,67	0
<1,30	33,48	34,15	32,19
<1,35	51,00	85,15	81,92
<1,40	6,08	91,23	92,87
<1,45	2,79	94,02	93,61
<1,50	1,46	95,48	95,36
<1,60	1,13	96,61	96,28
<1,80	0,89	97,50	97,87
<2,00	0,37	97,87	98,54
<2,20	2,13	100	100

Błąd aproksymacji w tym przypadku wynosi  $s_r = 1,35\%$ .

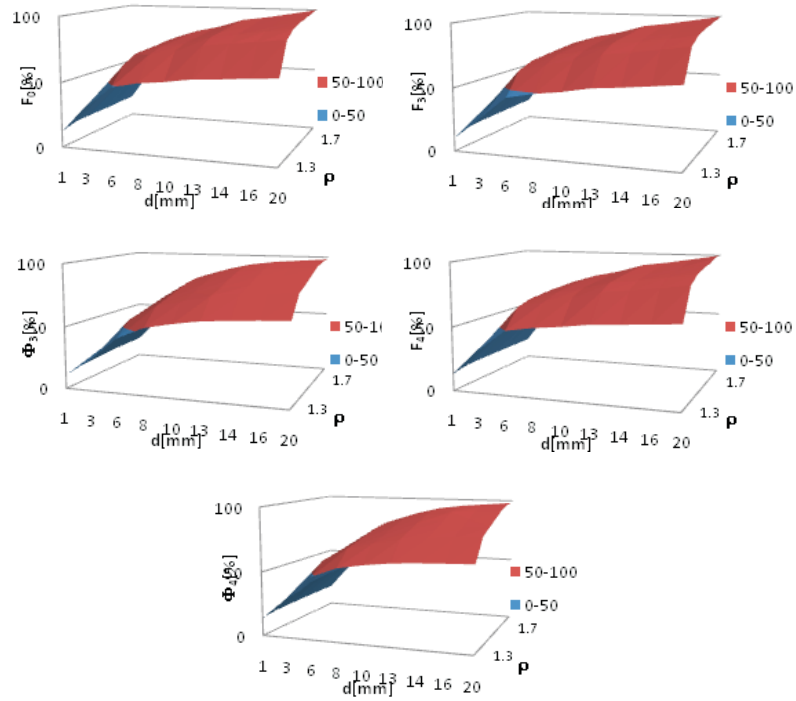
Dla tak zadanych dystrybuant funkcji brzegowych dokonano aproksymacji dystrybuanty zmiennej dwuwymiarowej  $F(d, \rho)$  według wzoru (3.39) Wyniki tej aproksymacji zawarto w tabeli 3.22, a wykres otrzymanej powierzchni przedstawiono na rysunku 3.15 (na wklejce).

Błąd aproksymacji dla dystrybuanty zmiennej dwuwymiarowej wyniósł  $s_r = 0,0301$ .

Uzyskane wyniki pozwalają stwierdzić, że otrzymana dystrybuanta teoretyczna  $F(d, \rho)$  wystarczająco dobrze aproksymuje rzeczywisty rozkład zmiennej losowej  $(D, P)$ . Niewielka wartość współczynnika Morgensterna  $\mu = -0,26118$  nie przeczy hipotezie niezależności zmiennych  $D$  i  $P$ , tzn. że  $F(d, \rho) = F_1(d) \cdot F_2(\rho)$ . Rozkład uzyskany poprzez klasyczne mnożenie dystrybuant brzegowych daje znacząco inny wynik (gorzej dobrany) w porównaniu do zastosowanego rozkładu Morgensterna. Świadczy to o słuszności stosowania metody.

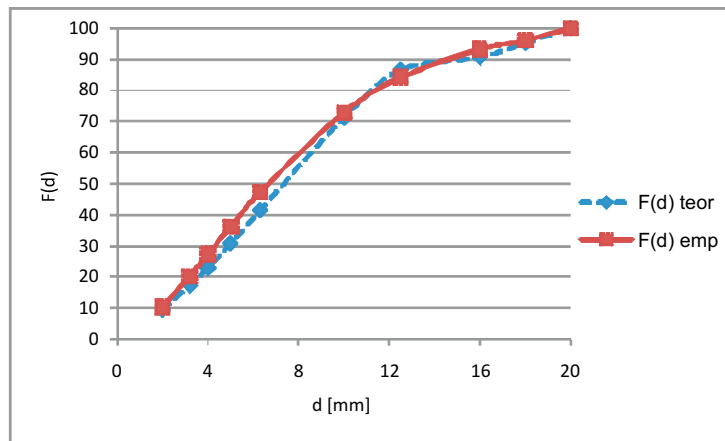
### 3.5. Rozkłady warunkowe

Innym podejściem do opisu właściwości materiału uziarnionego wielowymiarowymi rozkładami zmiennych losowych jest zastosowanie rozkładów warunkowych. Jak wiadomo, w przypadku węgla jednymi z najbardziej interesujących są związki pomiędzy wielkością ziarna  $D$  i jego gęstością  $P$  (dystrybuanta  $F(d, \rho)$ ).



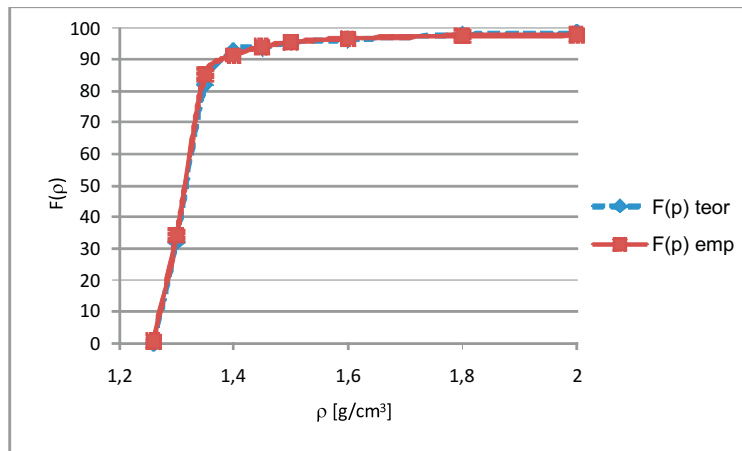
Rys. 3.12. Porównanie dystrybucji a) dystrybucja empiryczna  $F_0(d, \rho)$ ; b) dystrybucja  $F_3(d, \rho)$ ; c) dystrybucja aproksymowana  $\Phi_3(d, \rho)$ ; d) dystrybucja  $F_4(d, \rho)$ ; e) dystrybucja aproksymowana  $\Phi_4(d, \rho)$

Fig. 3.12. Comparison of distribution functions a) empirical distribution function  $F_0(d, \rho)$ ; b) distribution function  $F_3(d, \rho)$ ; c) approximated distribution function  $\Phi_3(d, \rho)$ ; d) distribution function  $F_4(d, \rho)$ ; e) approximated distribution function  $\Phi_4(d, \rho)$



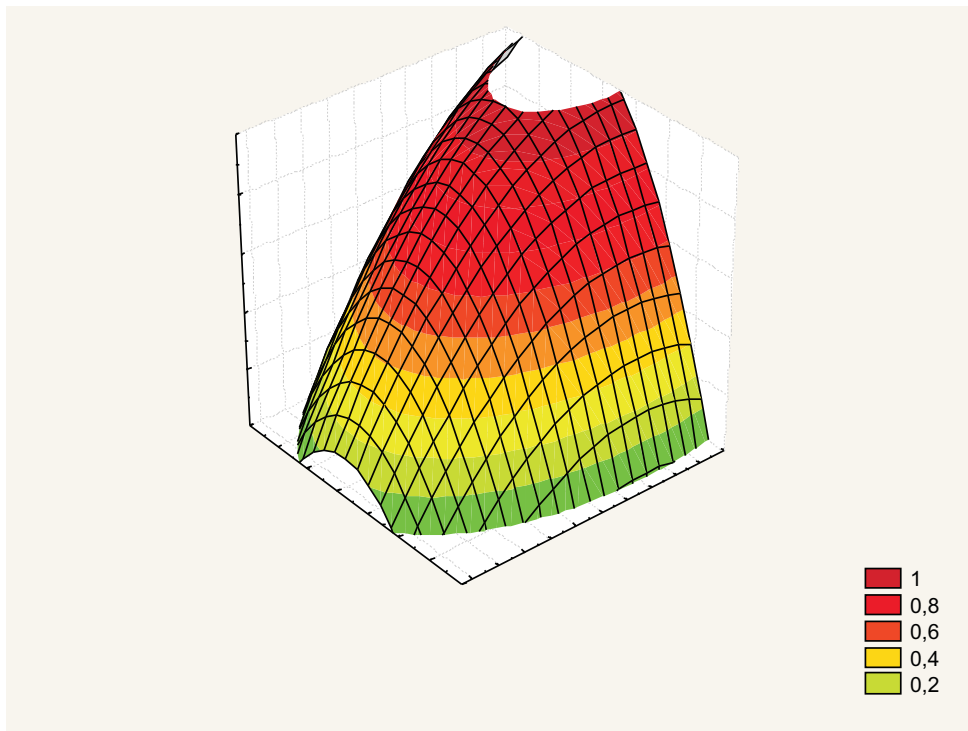
Rys. 3.13. Porównanie dystrybucji brzegowej  $F(d)$  uzyskanej metodą jądrową Gaussa z dystrybucją empiryczną

Fig. 3.13. Comparison of marginal distribution function  $F(d)$  obtained by Gauss kernel method and empirical distribution function



Rys. 3.14. Porównanie dystrybuanty brzegowej  $F(\rho)$  uzyskanej metodą Fouriera z dystrybuantą empiryczną

Fig. 3.14. Comparison of marginal distribution function  $F(\rho)$  obtained by Fourier method and empirical distribution function



Rys. 3.15. Wygładzona dystrybuanta rozkładu  $F(d, \rho)$  uzyskana metodą Morgensterna

Fig. 3.15. Smoothed distribution function  $F(d, \rho)$  obtained by Morgenstern method

Tabela 3.22

Dystrybuanta teoretyczna  $F(d, \rho)$ 

Table 3.22

Theoretical distribution function  $F(d, \rho)$ 

	2	3,2	4	5	6,3	10	12,5	16	18	20
1,26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1,3	0,0256	0,0475	0,0639	0,0867	0,1198	0,2180	0,2720	0,2871	0,3039	0,3219
1,35	0,0743	0,1361	0,1814	0,2435	0,3307	0,5767	0,7046	0,7398	0,7783	0,8192
1,4	0,0865	0,1580	0,2104	0,2817	0,3813	0,6592	0,8019	0,8409	0,8836	0,9287
1,45	0,0874	0,1596	0,2124	0,2843	0,3848	0,6649	0,8085	0,8472	0,8907	0,9361
1,5	0,0894	0,1632	0,2171	0,2905	0,3931	0,6782	0,8241	0,8640	0,9075	0,9536
1,6	0,0904	0,1651	0,2196	0,298	0,3974	0,6852	0,8324	0,8725	0,9164	0,9628
1,8	0,0923	0,1684	0,2240	0,2995	0,4050	0,6973	0,8466	0,8873	0,9317	0,9787
2	0,0930	0,1698	0,2258	0,3020	0,4082	0,7025	0,8526	0,8935	0,9382	0,9854
2,2	0,0948	0,1729	0,2299	0,3073	0,4152	0,7137	0,8657	0,9071	0,9523	1

Jeżeli oznaczy się przez  $F(d|\rho)$  dystrybuantę rozkładu warunkowego zmiennej losowej  $D$ , przy warunku  $P = \rho$ , tzn.

$$F(d|\rho) = P(D < d \wedge P = \rho)$$

oraz jako  $F(\rho)$  dystrybuantę rozkładu jednowymiarowego zmiennej losowej  $P$  to zachodzi wzór

$$F(d, \rho) = F(d|\rho) \cdot F(\rho)$$

Dystrybuantę rozkładu gęstości ziarna  $P$  można aproksymować cytowanymi i stosowanymi w poprzednich podrozdziałach niniejszej pracy parametrycznymi lub nieparametrycznymi rozkładami zmiennych losowych.

W tej części podjęto próbę aproksymacji rozkładu warunkowego  $F(d|\rho)$ . Badania oparto na wynikach badań laboratoryjnych materiału węglowego typu 31 (patrz załącznik), który rozdzielono na dziewięć klas ziarnowych, a następnie każdą z nich rozdzielono na osiem frakcji gęstościowych w wyniku przeprowadzenia analizy densymetrycznej.

Na podstawie wyników doświadczalnych skonstruowano warunkową empiryczną dystrybuantę  $F(d|\rho)$  dla zmiennej  $D$ , dla każdej klasy ziarnowej przy ustalonej wartości gęstości. Następnie, za pomocą dystrybuanty rozkładu Weibulla dokonano aproksymacji, stosując wzór (Tumidajski 1997):

$$\Phi(d) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{d}{b}\right)^c\right) \quad (3.42)$$

gdzie  $b$  i  $c$  są parametrami.

Otrzymane wyniki zostały zamieszczone w tabelach 3.23–3.30.

**Tabela 3.23**

Wyniki dystrybuanty doświadczalnej i teoretycznej dla  $\rho < 1,3$

**Table 3.23**

Results for experimental and theoretical functions for  $\rho < 1,3$

$d$ [mm]	0,5–1	1–3,15	3,15–6,3	6,3–8	8–10	10–12,5	12,5–14	14–16	16–20
$F(d \rho)$	12,66	43,03	75,62	83,12	86,68	91,74	94,22	97,52	100
$\Phi(d \rho)$	11,15	38,91	77,63	85,08	88,24	93,12	95,73	97,12	98,62

**Tabela 3.24**

Wyniki dystrybuanty doświadczalnej i teoretycznej dla  $\rho \in [1,3, 1,4]$

**Table 3.24**

Results for experimental and theoretical functions for  $\rho \in [1,3, 1,4]$

$d$ [mm]	0,5–1	1–3,15	3,15–6,3	6,3–8	8–10	10–12,5	12,5–14	14–16	16–20
$F(d \rho)$	14,91	45,12	74,46	82,47	89,55	93,81	96,59	97,91	100
$\Phi(d \rho)$	11,64	41,84	73,75	83,45	90,90	95,90	97,51	98,87	99,71

**Tabela 3.25**

Wyniki dystrybuanty doświadczalnej i teoretycznej dla  $\rho \in [1,4, 1,5]$

**Table 3.25**

Results for experimental and theoretical functions for  $\rho \in [1,4, 1,5]$

$d$ [mm]	0,5–1	1–3,15	3,15–6,3	6,3–8	8–10	10–12,5	12,5–14	14–16	16–20
$F(d \rho)$	6,60	23,85	48,17	55,39	64,84	73,23	78,59	87,26	100
$\Phi(d \rho)$	5,05	21,64	46,29	57,60	63,91	74,32	81,65	88,26	94,80

**Tabela 3.26**

Wyniki dystrybuanty doświadczalnej i teoretycznej dla  $\rho \in [1,5, 1,6]$

**Table 3.26**

Results for experimental and theoretical functions for  $\rho \in [1,5, 1,6]$

$d$ [mm]	0,5–1	1–3,15	3,15–6,3	6,3–8	8–10	10–12,5	12,5–14	14–16	16–20
$F(d \rho)$	5,31	23,34	43,44	57,50	69,12	75,10	80,20	88,28	100
$\Phi(d \rho)$	4,76	21,16	46,14	57,70	68,98	79,67	81,40	87,11	95,25

**Tabela 3.27**Wyniki dystrybuanty doświadczalnej i teoretycznej dla  $\rho \in [1,6, 1,7]$ **Table 3.27**Results for experimental and theoretical functions for  $\rho \in [1,6, 1,7]$ 

$d$ [mm]	0,5–1	1–3,15	3,15–6,3	6,3–8	8–10	10–12,5	12,5–14	14–16	16–20
$F(d \rho)$	3,85	27,04	57,28	64,30	71,78	83,56	89,78	95,29	100
$\Phi(d \rho)$	4,49	23,87	55,03	62,18	75,08	85,97	92,04	95,35	99,17

**Tabela 3.28**Wyniki dystrybuanty doświadczalnej i teoretycznej dla  $\rho \in [1,7, 1,8]$ **Table 3.28**Results for experimental and theoretical functions for  $\rho \in [1,7, 1,8]$ 

$d$ [mm]	0,5–1	1–3,15	3,15–6,3	6,3–8	8–10	10–12,5	12,5–14	14–16	16–20
$F(d \rho)$	23,52	44,61	68,63	75,26	79,44	83,51	92,72	94,36	100
$\Phi(d \rho)$	19,03	45,79	73,42	77,73	84,83	90,48	93,70	95,61	98,43

**Tabela 3.29**Wyniki dystrybuanty doświadczalnej i teoretycznej dla  $\rho \in [1,8, 1,9]$ **Table 3.29**Results for experimental and theoretical functions for  $\rho \in [1,8, 1,9]$ 

$d$ [mm]	0,5–1	1–3,15	3,15–6,3	6,3–8	8–10	10–12,5	12,5–14	14–16	16–20
$F(d \rho)$	7,64	27,72	49,61	60,53	69,96	80,04	83,19	85,32	100
$\Phi(d \rho)$	6,27	24,72	50,51	61,18	71,68	81,41	83,70	88,10	95,43

**Tabela 3.30**Wyniki dystrybuanty doświadczalnej i teoretycznej dla  $\rho \in [1,9, 2,0]$ **Table 3.30**Results for experimental and theoretical functions for  $\rho \in [1,9, 2,0]$ 

$d$ [mm]	0,5–1	1–3,15	3,15–6,3	6,3–8	8–10	10–12,5	12,5–14	14–16	16–20
$F(d \rho)$	10,65	25,90	36,43	56,01	67,70	74,18	80,75	89,89	100
$\Phi(d \rho)$	8,06	27,76	36,86	57,49	67,45	76,79	82,99	96,06	99,39

Otrzymane dystrybuanty warunkowe dla całego składu ziarnowego zadane są wzorem:

$$\Phi(d|\rho) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\left(\frac{d}{4,21}\right)^{1,02}\right) & \text{dla } \rho \leq 1,3 \\ 1 - \exp\left(-\left(\frac{d}{5,07}\right)^{1,29}\right) & \text{dla } \rho \in (1,3;1,4] \\ 1 - \exp\left(-\left(\frac{d}{8,96}\right)^{1,35}\right) & \text{dla } \rho \in (1,4;1,5] \\ 1 - \exp\left(-\left(\frac{d}{8,92}\right)^{1,38}\right) & \text{dla } \rho \in (1,5;1,6] \\ 1 - \exp\left(-\left(\frac{d}{7,28}\right)^{1,55}\right) & \text{dla } \rho \in (1,6;1,7] \\ 1 - \exp\left(-\left(\frac{d}{4,74}\right)^{0,99}\right) & \text{dla } \rho \in (1,7;1,8] \\ 1 - \exp\left(-\left(\frac{d}{8,35}\right)^{1,29}\right) & \text{dla } \rho \in (1,8;1,9] \\ 1 - \exp\left(-\left(\frac{d}{8,46}\right)^{1,18}\right) & \text{dla } \rho \in (1,9;2,0] \end{cases} \quad (3.43)$$

Jako miarę dopasowania zastosowano błąd średniokwadratowy  $s_r$ , zadany wzorem (3.44)

$$s_r = \sqrt{\frac{\sum_i (F_i(d|\rho) - \Phi_i(d|\rho))^2}{n-2}} \quad (3.44)$$

Wartości błędów  $s_r$  zaprezentowano w tabeli 3.31.

**Tabela 3.31**

Wartości błędów średniokwadratowych  $s_r$

**Table 3.31**

Values of mean standard errors  $s_r$

$\rho$ [g/cm <sup>3</sup> ]	< 1,3	(1,3, 1,4]	(1,4, 1,5]	(1,5, 1,6]	(1,6, 1,7]	(1,7, 1,8]	(1,8, 1,9]	(1,9, 2,0]
$s_r$ [%]	2,30	2,24	2,83	2,89	2,44	3,73	2,53	2,84

Okazało się, że wartości błędów dla każdej frakcji gęstościowej są do siebie podobne (w granicach 2 do 3%). Jedynie aproksymacja dla frakcji (1,7; 1,8) dała znacząco gorsze wyniki, gdzie wartość  $s_r$  wyniosła 3,73%. Biorąc pod uwagę wartości błędów aproksymacji można przyjąć, że dystrybuanty rozkładu Weibulla wystarczająco dobrze opisują krzywe składu ziarnowego.



### 3.5.1. Określenie funkcji gęstości dla zmiennych losowych B i C przy zastosowaniu metod jądrowych

Dla poszczególnych frakcji gęstościowych otrzymano ten sam typ rozkładu, ale jego parametry były różne.

Wprowadźmy więc zmienną losową  $B$ , określającą wartość współczynnika  $b$  oraz zmienną losową  $C$  określającą wartość współczynnika  $c$  w teoretycznej dystrybucji warunkowej  $\Phi(d|\rho)$  (wzór (3.61)). Otrzymane wartości współczynników zostały zamieszczone w tabeli 3.32.

**Tabela 3.32**

Wartości współczynników  $b$  i  $c$  zależnie od wartości  $\rho$

**Table 3.32**

Values of coefficients  $b$  and  $c$  dependably on the value of  $\rho$

$\rho$ [g/cm <sup>3</sup> ]	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$b$	4,21	5,07	8,96	8,92	7,28	4,74	8,35	8,46
$c$	1,02	1,29	1,35	1,38	1,55	0,99	1,29	1,18

Aby określić funkcję gęstości zmiennych losowych  $B$  i  $C$  zastosowano metodę jądrową.

Estymator badanej funkcji gęstości, otrzymany metodą jądrową na podstawie próbki losowej  $(x_1, \dots, x_n)$  jest funkcją (Domański, Pruska 2000; Niedoba, Tumidajski 2005) postaci:

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-x_i}{h}\right) \quad (3.45)$$

gdzie:  $K(x)$  – funkcja jądrowa,  
 $h$  – optymalna szerokość pasma,  
 $n$  – liczba pomiarów.

Jako funkcję jądrową przyjęto jądro Gaussa (Domański, Pruska 2000; Niedoba, Tumidajski 2005, 2006), daną równaniem

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad (3.46)$$

Wartość optymalnej szerokości pasma dla jądra Gaussa wyraża się wzorem

$$h = 1,06s \frac{1}{\sqrt[5]{n}} \quad (3.47)$$

gdzie:  $s$  – odchylenie standardowe zmiennej losowej  $X$ .

Przez zastosowanie wzorów (3.45), (3.46) oraz (3.47) otrzymano optymalne szerokości pasma  $h_B$  i  $h_C$ , jak również estymatory funkcji gęstości  $\hat{f}(b)$  i  $\hat{f}(c)$  dla zmiennych losowych  $B$  i  $C$ .

Dla zmiennej losowej  $B$ ,  $h_B = 1,29$

$$\hat{f}(b) = 0,0386 \sum_{i=1}^8 \exp\left(-\frac{(b-b_i)^2}{3,33}\right) \quad (3.48)$$

Natomiast dla zmiennej losowej  $C$ ,  $h_C = 0,02$

$$\hat{f}(c) = 0,4980 \sum_{i=1}^8 \exp\left(-\frac{(c-c_i)^2}{0,02}\right) \quad (3.49)$$

Wartości otrzymanych funkcji gęstości dla zmiennych losowych  $B$  i  $C$ , zaprezentowano w tabelach 3.33 i 3.34. Ponadto, ich graficzną interpretację przedstawiono na rys. 3.16 i 3.17.

**Tabela 3.33**

Wartości funkcji gęstości dla zmiennej losowej  $B$

**Table 3.33**

Values of statistical density functions for random variable  $B$

$b$	4,21	4,74	5,07	7,28	8,16	8,35	8,92	8,96
$\hat{f}(b)$	0,106	0,117	0,117	0,139	0,173	0,174	0,164	0,162

**Tabela 3.34**

Wartości funkcji gęstości dla zmiennej losowej  $C$

**Table 3.34**

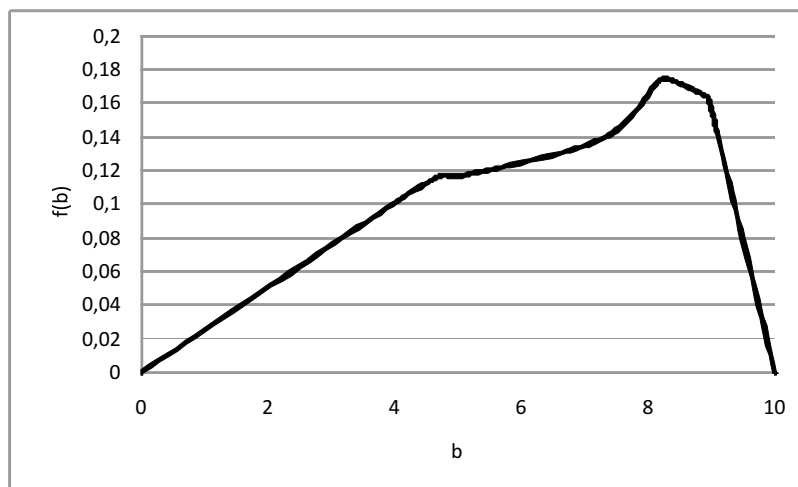
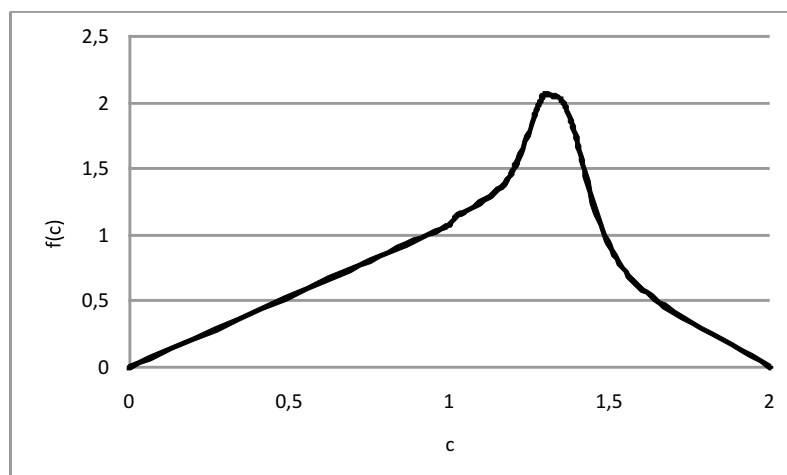
Values of statistical density function for random variable  $C$

$c$	0,99	1,02	1,18	1,29	1,30	1,35	1,38	1,55
$\hat{f}(c)$	1,066	1,138	1,416	2,049	2,064	2,017	1,860	0,722

Analizując wykresy uzyskanych funkcji dla zmiennych losowych  $B$  i  $C$  można postawić hipotezę, że obie zmienne można opisać za pomocą rozkładu normalnego.

Aby zweryfikować tę hipotezę zastosowano test Shapiro-Wilka (Dobosz 2001), według wzoru

$$W = \frac{\left(\sum a_i(n)(x_{n-i+1} - x_i)^2\right)^2}{\sum_j (x_j - \bar{x})^2} \quad (3.50)$$

Rys. 3.16. Wykres funkcji gęstości dla zmiennej losowej  $B$ Fig. 3.16. Plot of statistical density function for random variable  $B$ Rys. 3.17. Wykres funkcji gęstości dla zmiennej losowej  $C$ Fig. 3.17. Plot of statistical density function for random variable  $C$ 

gdzie:  $a_i(n)$  – współczynniki stabilizowane, zależne od liczebności próbki  $n$  oraz wskaźnika  $i$ ,  
 $i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$ .

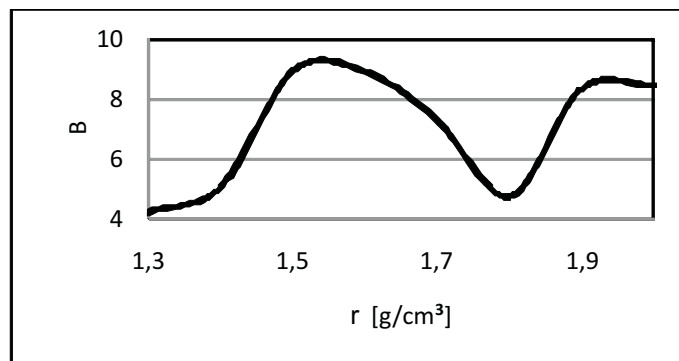
Dla zmiennej losowej  $B$  wartość testu  $W = 0,684$ , a dla zmiennej losowej  $C$ ,  $W = 0,8787$ .

Dla  $n = 8$ , przy poziomie istotności  $\alpha = 0,1$  obszarem krytycznym testu jest suma przedziałów  $(-\infty, 0,818) \cup (0,978, +\infty)$ . Ponieważ dla zmiennej losowej  $C$  wartość testu  $W$  nie

zawierała się w obszarze krytycznym, zatem można przyjąć, że zmienna losowa  $C$  ma rozkład normalny. Jednakże, dla zmiennej losowej  $B$  wartość testu  $W$  zawierała się w obszarze krytycznym testu, zatem hipoteza o rozkładzie normalnym zmiennej losowej  $B$  musi zostać odrzucona.

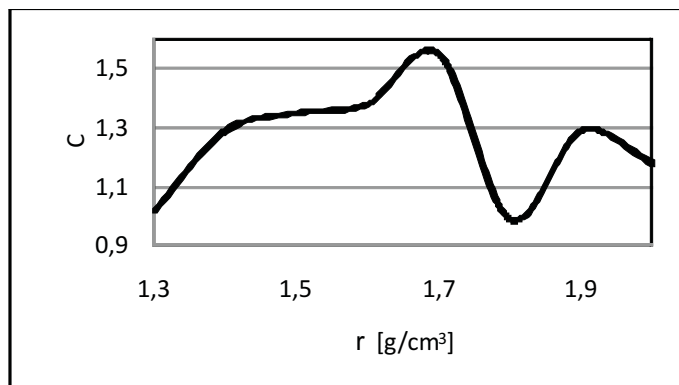
### 3.5.2. Relacja regresyjna pomiędzy zmiennymi losowymi $B$ , $C$ i gęstością $P$

Rozpatrzmy zależność regresyjną pomiędzy zmiennymi  $B$  i  $C$  oraz gęstością ziarna  $P$ . Przybliżone wykresy tych zależności, otrzymane na podstawie danych empirycznych zaprezentowano na rysunkach 3.18 i 3.19.



Rys. 3.18. Wykres zależności pomiędzy zmienną losową  $B$  i gęstością ziarna  $\rho$

Fig. 3.18. Plot of relation between random variable  $B$  and particle density  $\rho$



Rys. 3.19. Wykres zależności pomiędzy zmienną losową  $C$  i gęstością ziarna  $\rho$

Fig. 3.19. Plot of relation between random variable  $C$  and particle density  $\rho$

### 3.5.3. Aproksymacja tradycyjna

Próby aproksymacji rozpatrywanych krzywych za pomocą często stosowanych krzywych regresyjnych nie dały satysfakcjonujących wyników. Okazało się, że jedną z metod określenia postaci równań tych krzywych jest zastosowanie funkcji łączonych.

W wyniku aproksymacji za pomocą kwadratowej i liniowej funkcji otrzymano następujące równania tych krzywych:

$$C(\rho) = \begin{cases} 1,15\rho - 0,41 & \text{dla } \rho \in [1,3;1,7] \\ -5,60\rho + 11,70 & \text{dla } \rho \in [1,7;1,9] \\ -20,50\rho^2 + 78,50\rho - 74,52 & \text{dla } \rho \geq 1,9 \end{cases} \quad (3.51)$$

$$B(\rho) = \begin{cases} -63,73\rho^2 + 201,34\rho - 150 & \text{dla } \rho \in [1,3;1,7] \\ 307,50\rho^2 - 1101,65\rho + 991,41 & \text{dla } \rho \in [1,7;1,9] \\ -1\rho^2 + 440\rho + 787,94 & \text{dla } \rho \geq 1,9 \end{cases} \quad (3.52)$$

### 3.5.4. Aproksymacja metodą Fouriera

Drugą metodą określenia funkcji regresyjnych  $C(\rho)$  oraz  $B(\rho)$  jest zastosowanie estymatora Fouriera funkcji regresji (Gajek, Kałuska 1993; Eubank 1988). Estymator Fouriera funkcji regresji  $f(x)$  określonej w przedziale  $[-\pi, \pi]$  jest funkcją postaci

$$f_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{J_n} (a_j \cos jx + b_j \sin jx) \quad (3.53)$$

gdzie:  $a_j$  i  $b_j$  – estymatory współczynników szeregu Fouriera, dane następującymi wzorami:

$$a_j = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n f(x_i) \int_{S_{i-1}}^{S_i} \cos jx dx \quad (3.54)$$

$$b_j = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n f(x_i) \int_{S_{i-1}}^{S_i} \sin jx dx \quad (3.55)$$

Estymatory te są obliczone na podstawie próbki losowej o liczebności  $n$  elementów  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Ciąg  $\{S_n\}$  jest zdefiniowany w następujący sposób:  $S_0 = -\pi$ ,  $S_K = \frac{1}{2}(x_K + x_{K+1})$

dla  $k = 1, \dots, n-1$ ,  $S_n = \pi$ .

Parametr  $J_n$  jest to tzw. parametr ucięcia, który jest proporcjonalny do  $\sqrt{n}$  i zależy od wartości estymowanej funkcji na krańcach przedziału oraz odchylenia standardowego rozpatrywanej zmiennej losowej.

Przez transformację wartości zmiennej losowej na przedział  $[-\pi, \pi]$  przy zastosowaniu transformacji liniowej  $y = 7,85\rho - 12,56$  oraz określeniu wartości parametru ucięcia  $J_n = 7$ , otrzymano estymator funkcji regresji  $C(\rho)$

$$C(\rho) = 1,245 + 0,184 \cos y - 0,991 \sin y + 0,0412 \cos 2y - 0,0073 \sin 2y - 0,0327 \cos 3y + 0,119 \sin 3y - 0,059 \cos 4y - 0,004 \sin 4y - 0,029 \cos 5y - 0,059 \sin 5y + 0,029 \cos 6y - 0,007 \sin 6y + 0,011 \cos 7y - 0,077 \sin 7y \quad (3.56)$$

gdzie  $y = 7,85\rho - 12,56$

Przy przyjęciu parametru ucięcia  $J_n = 3$  dla funkcji regresji  $B(\rho)$  został otrzymany estymator następującej postaci:

$$B(\rho) = 6,745 + 2,249 \cos y - 1,251 \sin y + 2,225 \cos 2y - 1,530 \sin 2y - 1,035 \cos 3y - 1,273 \sin 3y \quad (3.57)$$

gdzie:  $y = 7,85\rho - 12,56$

Wartości estymatorów dla punktów pomiarowych zostały zaprezentowane w tabelach 3.35 i 3.36.

**Tabela 3.35**

Wartości funkcji  $C(\rho)$  i jej estymatory

**Table 3.35**

Values of function  $C(\rho)$  and its estimators

$\rho$ [g/cm <sup>3</sup> ]	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$C(\rho)$	1,02	1,28	1,35	1,38	1,55	0,99	1,29	1,18
Estymator $C(\rho)$	1,00	1,31	1,38	1,39	1,59	0,98	1,26	1,13

**Tabela 3.36**

Wartości funkcji  $B(\rho)$  i jej estymatory

**Table 3.36**

Values of function  $B(\rho)$  and its estimators

$\rho$ [g/cm <sup>3</sup> ]	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$B(\rho)$	4,21	5,07	8,96	8,92	7,28	4,74	8,35	8,46
Estymator $B(\rho)$	4,33	4,50	10,38	9,83	6,76	4,54	6,97	7,76

Jako kryterium oceny przyjęto współczynnik zgodności, dany równaniem

$$\varphi^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (f(x_i) - \tilde{f}(x_i))^2}{\sum_{i=1}^n (f(x_i) - \bar{f})^2} \quad (3.58)$$

gdzie:  $\bar{f}$  – wartość średnia  $f(x_i)$ ,  
 $\tilde{f}(x)$  – estymator funkcji  $f(x)$ .

Wartość współczynnika  $\varphi^2$  dla funkcji  $C(\rho)$  była równa 0,004, a dla funkcji  $B(\rho) = 0,19$ , co potwierdziło dobrą jakość aproksymacji obu funkcji. Lepszą aproksymację uzyskano dla funkcji  $C(\rho)$ , co było spowodowane faktem, że hipoteza o normalności rozkładu zmiennej  $B$  była odrzucona.

Okazało się na podstawie analizy, że rozkład warunkowy zmiennej losowej  $D$ , opisujący wielkość ziarna przy założeniu, że gęstość ziarna jest równa  $\rho$ , jest dany następującym równaniem

$$\Phi(d|\rho) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{d}{B(\rho)}\right)^{C(\rho)}\right) \quad \text{dla } \rho \geq 1,3 \quad (3.59)$$

gdzie  $B(\rho)$  i  $C(\rho)$  są funkcjami danymi równaniami (3.56) i (3.57).

Zastosowanie metody Fouriera do estymacji funkcji regresji dało możliwość uzyskania postaci analitycznej rozkładu warunkowego zmiennej losowej, opisującej wielkość ziarna przy założonej wartości jego gęstości. Znając rozkład gęstości ziarna, która najczęściej aproksymowana jest za pomocą rozkładów Weibulla lub rozkładu logistycznego możliwe jest utworzenie dwuwymiarowego rozkładu opisującego rozmiar i gęstość ziarna. Można to zapisać jako:

$$f(d, \rho) = f(d|\rho)f(\rho) \quad (3.60)$$

gdzie:  $f(d, \rho)$  – funkcja gęstości dwuwymiarowej zmiennej losowej  $(D, P)$ ,  
 $f(d|\rho)$  – warunkowa funkcja gęstości zmiennej losowej  $D$  przy znanej wartości  $\rho$ , a  $f(\rho)$  jest funkcją gęstości zmiennej losowej  $P$ .

Tak więc możliwe jest badanie właściwości materiału uziarnionego przy zastosowaniu wielowymiarowych rozkładów zmiennych losowych (np. powierzchnie wzbogacalności i wzbogacania, powierzchnie rozdziału, powierzchnie częstości, czy też częstości skumulowanych).

Jak już wielokrotnie wspomiano, analiza rozkładów właściwości materiału uziarnionego (np. węgla), które decydują o jego rozdziale na produkty (zwykle są to wielkość ziarna  $D$  i gęstość  $P$ ), jak również zachowanie się wartości średniej badanej cechy  $W_i$  (np. zawartość popiołu, siarki, innych składników, jak również inne właściwości określające jakość produktu) powinna być podstawą projektowania układów przygotowania materiału do wzbogacania, jak również samych urządzeń stosowanych podczas tego procesu. Do analizy rozkładów dwuwymiarowych wektora losowego  $(D, P)$  może służyć dystrybuanta  $F(d, \rho)$  jego rozkładu. Do badania zależności wartości średniej cechy  $W_i$  od cech decydujących o rozdziale materiału uziarnionego na produkty  $(D, P)$  może służyć dwuwymiarowa funkcja regresji postaci  $E(W_i | D = d, P = \rho)$ . Interpretację słupkową regresji II rodzaju dla węgla typu 31 na zawartość siarki i popiołu przedstawiono na rysunkach 3.20 i 3.21 (na wklejce) (Olejnik i in. 2010).

Na podstawie analizy powyższych wykresów można wyodrębnić punkty charakterystyczne, jak również kształt powierzchni regresji II rodzaju (powierzchni wzbogacalności), które mogą być pomocne w opracowaniu strategii działania przy budowie całego układu wzbogacania, bądź jego modernizacji.

### 3.6. Zastosowanie krigingu w analizie materiałów uziarnionych

#### 3.6.1. Analiza wielowymiarowa charakterystyk węgla z użyciem metody krigingu

W rozdziale 2.5 przedstawiono charakterystykę metody krigingu zwyczajnego. W poniższych podrozdziałach zaprezentowane zostanie jego praktyczne zastosowanie.

Przeprowadzając analizę miałów pochodzących z KWK Czeczott – ze względu na skład ziarnowy i gęstościowy – otrzymano wyniki zamieszczone w tabeli 3.37 (Niedoba 2009; Tumidajski, Niedoba 2008; Tumidajski 1997)

**Tabela 3.37**

Dystrybuanta warunkowa  $F(d|\rho)$

**Table 3.37**

Conditional distribution function  $F(d|\rho)$

Granice frakcji $R$ [g/cm <sup>3</sup> ]	Granice klas $D$ [mm]									
	2,0	3,2	4,0	5,0	6,3	10,0	12,5	16,0	18,0	20,0
1,2	4,89	9,29	12,22	21,02	27,87	67,97	80,19	96,08	100	100
1,4	9,50	19,88	24,61	38,06	49,52	73,67	81,57	92,58	95,96	100
1,6	9,62	20,05	24,81	38,32	49,70	73,51	81,67	92,65	95,99	100
1,8	9,69	20,17	24,94	38,47	49,88	73,67	81,78	92,69	96,01	100
2,0	9,73	20,24	25,01	38,53	49,93	73,73	81,82	92,71	96,02	100
2,2	9,93	20,52	25,31	38,83	50,26	74,10	82,07	92,81	96,07	100



Odległości pomiędzy poszczególnymi gęstościami wynoszą odpowiednio: 0,0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0.

Rozważając poszczególne modele wariogramu, dobierając ich parametry metodą najmniejszych kwadratów lub metodą największej wiarygodności na podstawie danych zamieszczonych w tabeli 3.38 otrzymano następujący wektor wariogramów teoretycznych:

$$\gamma(h) = \begin{bmatrix} 2,12e^{2,013h} \\ 0,917e^{2,026h} \\ 11,93h + 0,275 \\ 1,245e^{1,946h} \\ 15,946e^{1,948h} \\ 0,9968e^{1,9968h} \\ 1,3705e^{2,08h} \\ 0,0165e^{2,4h} \\ 0,98e^{1,89h} \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

**Tabela 3.38**

Wartości estymatora wariogramu  $\tilde{\gamma}(h)$

**Table 3.38**

Values of estimator of variogram  $\tilde{\gamma}(h)$

Odległość h [mm]	Granica klas D [mm]								
	3,2	4,0	5,0	6,3	10,0	12,5	16,0	18,0	20,0
0,2	3,66	0,32	1,56	2,13	25,45	1,76	2,38	0,03	1,63
0,4	4,52	0,42	4,60	2,56	35,92	2,06	3,02	0,04	2,01
0,6	6,15	0,56	6,68	3,47	44,36	2,82	4,15	0,06	2,65
0,8	9,31	0,89	10,15	5,18	66,45	4,26	6,27	0,10	3,96
01	15,10	1,73	11,14	10,49	132,19	9,03	13,26	0,22	7,72

Wartości wariogramów teoretycznych dla poszczególnych klas przedstawia tabela 3.39.

Dla klasy  $d = 2,0$  [mm] nie wyznaczono wariogramu, gdyż  $\sum_{i=1}^m D_i(\rho_0) = 1$ , znając  $D_i(\rho_0)$

dla  $i = 2, \dots, m$  można wyznaczyć  $D_1(\rho_0)$ .

W celu sprawdzenia stosowanej metody wyznaczono za pomocą metody kriginu rozkład wielkości ziarna dla gęstości  $\rho = 1,5$  [g/cm<sup>3</sup>] oraz  $\rho = 1,3$  [g/cm<sup>3</sup>] i porównano je z wynikami doświadczalnymi.

**Tabela 3.39**Wartości teoretycznych wariogramów  $\gamma(h)$ **Table 3.39**of theoretical variograms  $\gamma(h)$ 

Odległość $h$ [mm]	Granica klas D [mm]								
	3,2	4,0	5,0	6,3	10,0	12,5	16,0	18,0	20,0
0,2	3,17	0,29	2,11	1,83	23,54	1,76	2,07	0,03	1,43
0,4	4,74	0,43	4,50	2,71	34,76	2,06	3,14	0,04	2,08
0,6	7,09	0,65	6,88	4,00	51,32	2,82	4,77	0,07	3,04
0,8	10,61	0,97	9,27	5,90	75,76	4,26	7,23	0,11	4,44
1	15,87	1,45	11,65	8,72	111,86	9,03	10,97	0,18	6,47

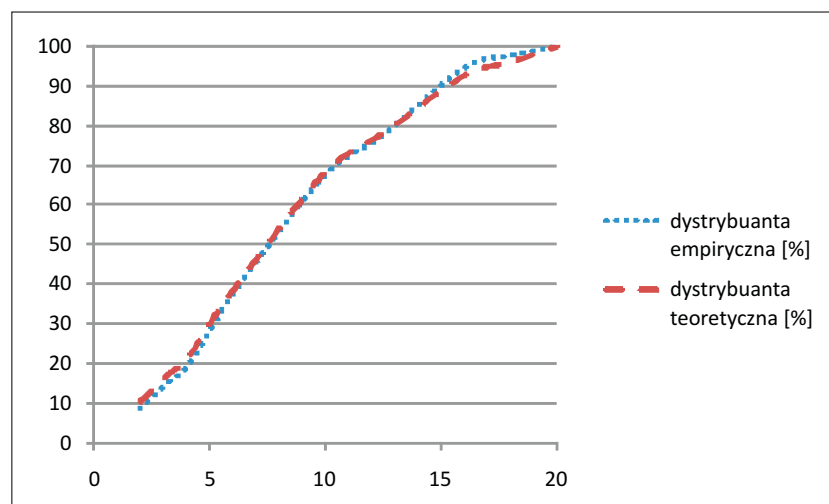
Wyniki rozkładów doświadczalnych i teoretycznych dla poszczególnych gęstości przedstawiają tabele 3.40 i 3.41 oraz wykresy 3.22 i 3.23.

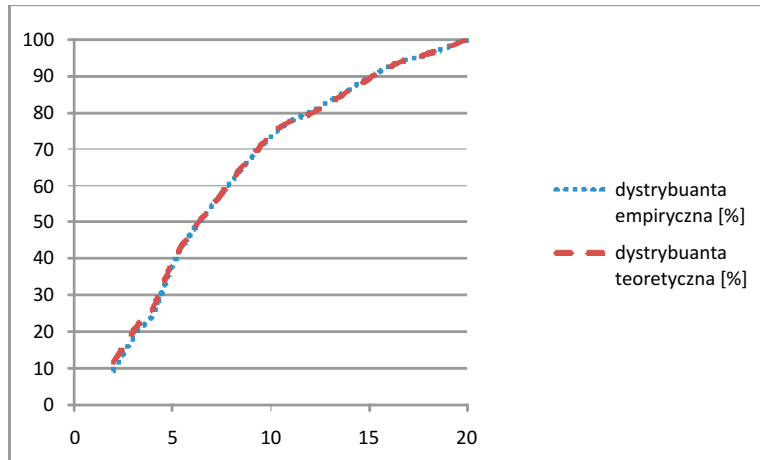
**Tabela 3.40**Porównanie dystrybuanty teoretycznej i doświadczalnej dla  $\rho = 1,5$  [g/cm<sup>3</sup>]**Table 3.40**Comparison of theoretical and empirical distribution functions for  $\rho = 1,5$  [g/cm<sup>3</sup>]

Wielkość ziaren [mm]	Wartość dystrybuanty empirycznej [%] $F_{emp}(d \rho)$	Wartość dystrybuanty teoretycznej [%] $F_{teor}(d \rho)$
2,0	9,56	11,86
3,2	19,95	21,75
4,0	24,70	26,57
5,0	38,22	39,25
6,3	49,63	49,62
10,0	73,48	73,87
12,5	81,50	81,07
16,0	92,58	92,38
18,0	95,95	96,11
20,0	100	100

**Tabela 3.41**Porównanie dystrybuanty teoretycznej i doświadczalnej dla  $\rho = 1,3$  [g/cm<sup>3</sup>]**Table 3.41**Comparison of theoretical and empirical distribution functions for  $\rho = 1,3$  [g/cm<sup>3</sup>]

Wielkość ziaren [mm]	Wartość dystrybuanty empirycznej [%] $F_{emp}(d \rho)$	Wartość dystrybuanty teoretycznej [%] $F_{teor}(d \rho)$
2,0	8,68	10,44
3,2	15,20	17,12
4,0	19,03	20,88
5,0	28,28	30,05
6,3	40,05	40,72
10,0	67,60	68,27
12,5	77,69	78,12
16,0	94,61	92,57
18,0	97,68	95,98
20,0	100	100

Rys. 3.22. Porównanie dystrybuanty teoretycznej i doświadczalnej dla  $\rho = 1,5$  [g/cm<sup>3</sup>]Rys. 3.22. Comparison of theoretical and empirical distribution functions for  $\rho = 1,5$  [g/cm<sup>3</sup>]



Rys. 3.23. Porównanie dystrybuanty teoretycznej i doświadczalnej dla  $\rho = 1,3 \text{ [g/cm}^3\text{]}$

Fig. 3.23. Comparison of theoretical and empirical distribution functions for  $\rho = 1,3 \text{ [g/cm}^3\text{]}$

Do oceny błędu zastosowano błąd średniokwadratowy

$$s_r = \sqrt{\frac{\sum (F_t(d_i) - F_d(d_i))^2}{k-2}} \quad (3.62)$$

gdzie:  $F_t(d_i)$  – dystrybuanta teoretyczna,  
 $F_d(d_i)$  – dystrybuanta empiryczna,  
 $k$  – liczba klas.

Obliczone wartości błędu  $s_r$  przedstawiono w tabeli 3.42.

**Tabela 3.42**

Wartości błędu średniokwadratowego  $s_r$

**Table 3.42**

Values of mean standard error  $s_r$

$\rho \text{ [g/cm}^3\text{]}$	$s_r \text{ [%]}$
1,3	1,55
1,5	1,29

Jak wynika z obliczeń wyniki uzyskane metodą krigingu zwyczajnego są bardzo zbliżone do uzyskanych eksperymentalnie (wartości  $s_r$  są małe). Rozwiązując odpowiedni układ równań można uzyskać rozkład wielkości ziaren dla dowolnej gęstości z badanego przedziału.

### 3.6.2. Zawartość popiołu w węglu w zależności od wielkości ziarna $D$ i jego gęstości $P$ – wariogram łączony

W przeróbce surowców mineralnych różne cechy materiału uziarnionego decydują o jego rozdziale. Badanie zależności pomiędzy zawartością popiołu w ziarnach węgla oraz ich wielkością i gęstością jest przedmiotem tego podrozdziału. Wprowadźmy następujące zmienne losowe:  $D$  – wielkość ziarna (średnica);  $P$  – gęstość ziarna;  $Z$  – zawartość popiołu w ziarnie. Celem jest określenie (na podstawie wyników badań laboratoryjnych) funkcji  $Z = \lambda(d, \rho)$ . Teoretycznie funkcja ta może być wyznaczona za pomocą kilku metod, tj.:

1. Przez zastosowanie klasycznej teorii dwuwymiarowej regresji, a więc poszukiwanie funkcji, np. liniowej  $z = ad + b\rho + c$ , multiplikatywnej  $z = ad^b \rho^c$  lub innych (rozdział 2.5) na podstawie danych empirycznych, gdzie  $d$  jest wielkością ziarna,  $\rho$  – gęstością ziarna,  $z$  – zawartością popiołu.

2. Przez skonstruowanie trójwymiarowej dystrybuanty dla wektora losowego  $X = (D, P, Z)$ , określając funkcję  $\lambda(d, \rho)$  na podstawie regresji warunkowej, a więc

$$\lambda(d, \rho) = \int_A \frac{zf(d, \rho, z)}{g(d, \rho)} dz \quad (3.63)$$

gdzie:  $A$  – zbiór wartości zmiennej losowej  $Z$ ,  
 $f(d, \rho, z)$  – funkcja gęstości trójwymiarowej zmiennej losowej  $X = (D, P, Z)$ ,  
 $g(d, \rho)$  – funkcja gęstości dwuwymiarowej zmiennej losowej  $Y = (D, P)$ .

Do aproksymacji funkcji gęstości badanych wielowymiarowych rozkładów zmiennych losowych  $X$  i  $Y$  można zastosować funkcje Morgensterna (Tumidajski 1997; Tumidajski, Niedoba 2008), w których przyjęto, że funkcja gęstości zmiennej losowej  $Y$  jest zadana równaniem:

$$g(d, \rho) = f_1(d) f_2(\rho) [1 + \alpha(1 - 2F_1(d))(1 - 2F_2(\rho))] \quad (3.64)$$

gdzie:  $f_1(d)$  – funkcja gęstości zmiennej losowej  $D$ ,  
 $f_2(\rho)$  – funkcja gęstości zmiennej losowej  $P$ ;  $F_1(d)$  i  $F_2(\rho)$  – ich dystrybuanty,  
 $\alpha \in [-1, 1]$  – odpowiednio wybrany współczynnik.

W ten sam sposób określa się funkcję gęstości trójwymiarowej zmiennej losowej  $X$ . Jej postać jest następująca:

$$f(d, \rho, z) = \left[ \begin{array}{l} 1 + \alpha_1(1 - 2F_1(d))(1 - 2F_2(\rho)) + \\ \alpha_2(1 - 2F_1(d))(1 - 2F_3(z)) + \\ \alpha_3(1 - 2F_2(\rho))(1 - 2F_3(z)) + \\ \alpha_4(1 - 2F_1(d))(1 - 2F_2(\rho))(1 - 2F_3(z)) \end{array} \right] \cdot f_1(d) \cdot f_2(\rho) \cdot f_3(z) \quad (3.65)$$

gdzie:  $f_3(z)$  – funkcja gęstości zmiennej losowej  $Z$ ,

$F_3(z)$  – jej dystrybuanta,

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  i  $\alpha_4$  – współczynniki określone na podstawie danych doświadczalnych w sposób zapewniający spełnienie następujących założeń (Niedoba 2011a): dla każdego  $x_1, x_2, x_3$  z zakresu  $|x_i| \leq 1$ :

$$1 + \alpha_1 x_1 x_2 + \alpha_2 x_1 x_3 + \alpha_3 x_2 x_3 \geq 0 \quad (3.66)$$

$$1 + \alpha_1 x_1 x_2 + \alpha_2 x_1 x_3 + \alpha_3 x_2 x_3 + \alpha_4 x_1 x_2 x_3 \geq 0 \quad (3.67)$$

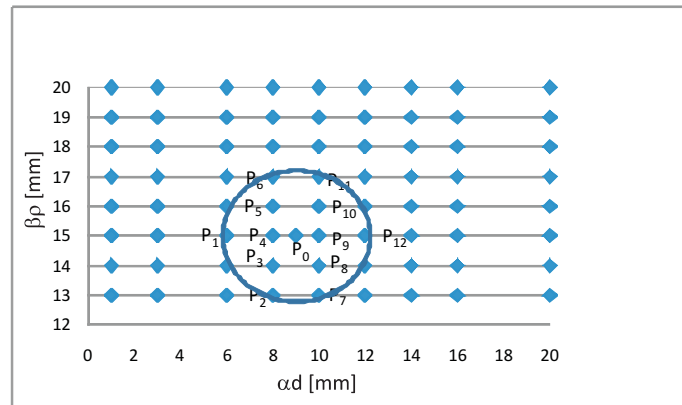
3. Przez zastosowanie metody krigingu zwyczajnego.

Przyjęto, że estymatorem empirycznym funkcji wariogramu jest estymator Matherona (Matheron 1989; Namysłowska-Wilczyńska 2006) (wzór (2.62)).

Dla praktycznego zilustrowania metody krigingu zwyczajnego węgiel typu 31 został podzielony na klaso-frakcje i dla 72 punktów pomiarowych  $P_i = (d_i, \rho_i)$  określono wielkości i gęstości ziaren, gdzie  $d_i$  jest średnią wielkością ziarna [mm],  $\rho_i$  jest gęstością ziarna [ $\text{g}/\text{cm}^3$ ], a  $Z(P_i)$  jest zawartością popiołu [%].

W celu zapewnienia jednakowego wpływu obu cech na odległość pomiędzy punktami dokonano transformacji zmiennych,  $u = \alpha d$ ,  $v = \beta \rho$ , gdzie  $\alpha$  jest współczynnikiem liczbowym, a  $\beta$  jest podane w  $\left[ \frac{\text{cm}^3 \text{mm}}{\text{g}} \right]$ . W tym przypadku przyjęto, że  $\alpha = 1$ , a  $\beta = 10$  (uzgodnienie skal).

Wyniki zobrazowano na rysunku 3.24.



Rys. 3.24. Położenie punktów empirycznych

Fig. 3.24. Location of empirical points

Za miarę odległości pomiędzy punktami  $P_i$  i  $P_j$  przyjęto następujące równanie

$$\delta(P_i, P_j) = \sqrt{u_i^2 + v_i^2} = \sqrt{\alpha^2 d_i^2 + \beta^2 \rho_i^2} \quad (3.68)$$

Punkt, dla którego zawartość popiołu była obliczona miał współrzędne  $P_0(9, 15)$ , tzn.  $(d, \rho) = (9; 1,5)$ . Jako zakres wpływu przyjęto okrąg  $K(P_0, r)$  o środku w punkcie  $P_0$  oraz promieniu  $r = 3$ .

Punkty  $P_i, i = 1, 2, \dots, 12$  miały wpływ na wartość  $Z(P_0)$ .

W celu dopasowania funkcji wariogramu teoretycznego zastosowano metodę najmniejszych kwadratów. Pary punktów, dla których odległości były podobne zostały zakwalifikowane do tej samej grupy  $N(h)$ .

Otrzymano następujące postacie wariogramów:

Model liniowy:  $\gamma_1(h) = 50,26h - 33,06$

Model wykładniczy  $\gamma_2(h) = 11,12e^{0,665h}$

Model sferyczny  $\gamma_3(h) = \begin{cases} 173(0,33h - 0,006h^3) & \text{dla } h \leq 2\sqrt{5} \\ 166,34 & \text{dla } h > 2\sqrt{5} \end{cases}$

Model potęgowy  $\gamma_4(h) = 18,73h^{1,6}$

Wartości wariogramów dla poszczególnych modeli oraz wariogramu empirycznego zostały podane w tabeli 3.43.

**Tabela 3.43**

Wartości wariogramów teoretycznych i wariogramu empirycznego

**Table 3.43**

Values of theoretical and empirical variograms

h	$\gamma^*(h)$	$\gamma_1(h)$	$\gamma_2(h)$	$\gamma_3(h)$	$\gamma_4(h)$
1	20,65	17,2	21,43	56,66	18,73
2	49,11	64,46	41,67	107,61	56,98
3	122,77	117,12	81,02	145,84	108,03
$\sqrt{13}$	163,62	148,16	121,20	160,31	145,78
4	170,89	167,38	157,54	165,39	172,12
$2\sqrt{5}$	173,25	191,71	215,65	166,34	205,76
6	173,72	268,5	295,68	166,34	300,29

Ponieważ żaden z modeli nie dał zadowalającej aproksymacji wariogramu empirycznego przyjęto model łączony o postaci

$$\gamma(h) = \begin{cases} 0 & \text{dla } h = 0 \\ 8,15e^{0,9056h} & \text{dla } h \in (0,3] \\ 64,79h - 70,52 & \text{dla } h \in (3, \sqrt{13}) \\ 179,48(0,33h - 0,006h^3) & \text{dla } h \in [\sqrt{13}, 4,3] \\ 169,07 & \text{dla } h > 4,3 \end{cases} \quad (3.69)$$

Wartości wariogramu  $\gamma(h)$  podano w tabeli 3.44 oraz na rysunku 3.25.

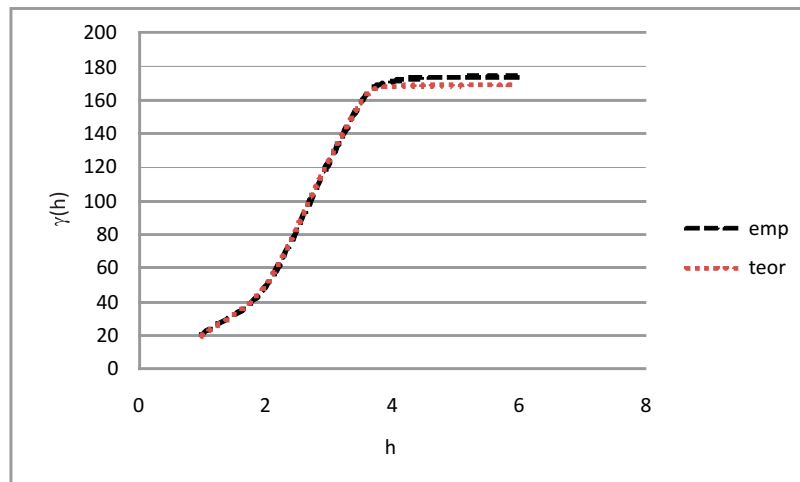
Tabela 3.44

Wartości wariogramu łączonego

Table 3.44

Values of joined variogram

$h$	$\gamma^*(h)$	$\gamma(h)$
1	20,65	20,16
2	49,11	49,85
3	122,77	123,85
$\sqrt{13}$	163,62	163,08
4	170,89	167,99
$2\sqrt{5}$	173,25	168,56
6	173,72	169,07



Rys. 3.25. Porównanie przebiegu wariogramu empirycznego i łączonego

Fig. 3.25. Comparison of empirical and joined variograms course

Aby ocenić otrzymane wyniki zastosowano błąd średniokwadratowy  $s_r$ , który obliczono na podstawie równania

$$s_r = \sqrt{\frac{\sum_i (\gamma_i(h) - \gamma^*(h))^2}{n-2}} \quad (3.70)$$

W tym przypadku  $s_r = 3,02$ .



Aby określić wartości zawartości popiołu w punkcie  $P_0$  wybrano otoczenie  $K(P_0, r)$ , gdzie  $r = \sqrt{5}$ .

Poprzez rozwiązanie układu równań (2.72) dla punktów  $P_3, P_4, P_5, P_8, P_9, P_{10}$  oraz stosując obliczone wartości  $\lambda_i$  we wzorze (2.64) okazało się, że

$$Z(P_0) = -0,01156Z(P_3) + 0,52312Z(P_4) - 0,01156Z(P_5) - 0,0115619Z(P_6) = 18,80$$

Aby zweryfikować przyjęty model, wartości  $Z(P_i)$  zostały obliczone w punktach, które stanowiły podstawę do obliczeń wariogramu; do estymacji brano pod uwagę punkty  $P_j$  zlokalizowane wewnątrz okręgu  $K(P_i, \sqrt{5})$ , ale bez punktu  $P_i$ .

Wyniki aproksymacji podano w tabeli 3.45, a ich graficzna interpretacja została przedstawiona na rysunkach 3.26 i 3.27 (na wklejce).

Tabela 3.45

Wyniki aproksymacji zawartości popiołu  $Z(P_i)$ 

Table 3.45

Results of ash contents approximation  $Z(P_i)$ 

$P_i$	$\tilde{Z}(P_i)_{emp}$	$Z(P_i)_{teor}$
1	14,84	15,93
2	10,70	13,47
3	12,09	13,98
4	16,20	19,56
5	25,05	26,69
6	34,50	38,37
7	6,42	6,47
8	16,21	16,71
9	21,58	23,02
10	30,33	29,01
11	32,14	34,33
12	23,18	21,39

### 3.6.3. Zawartość popiołu i siarki – wariogram dwuwymiarowy

W badaniu jakościowym surowca (węgla) interesującym jest badanie kilku jego cech (np. zawartości popiołu, siarki, części lotnych, liczby Rogi itp.). W tym podrozdziale badano zawartość procentową popiołu i siarki w zależności od wielkości ziarna i jego gęstości.

Oznaczmy przez  $D$  zmienną losową opisującą średnicę ziarna, a przez  $P$  jego gęstość. Niech  $x = (d, \rho)$  jest realizacją zmiennych  $D$  i  $P$ . Każdemu punktowi  $x$  została przyporządkowana para zmiennych losowych  $(Z, S)$ , gdzie  $Z$  – zawartość procentowa popiołu,  $S$  – zawartość procentowa siarki. Otrzymujemy więc odwzorowanie

$$x \rightarrow (Z(x), S(x)) \quad (3.71)$$

gdzie:  $x = (d, \rho)$ .

Przez odległość między punktami rozumiemy odległość zdefiniowaną następująco:

$$\delta(x_1, x_2) = \sqrt{(ad_1 - ad_2)^2 + (b\rho_1 - b\rho_2)^2} \quad (3.72)$$

gdzie:  $a, b$  są odpowiednio dobranymi współczynnikami wymiarowymi, tak aby wartość zmiennych  $ad, b\rho$  tworzyły kwadrat (np. jednostkowy). Zapewnia się w ten sposób jednakowy wpływ obu zmiennych na wartość odległości.

Zakłada się, że

$$\begin{aligned} E(Z(x+h) - Z(x)) &= 0 \\ E(S(x+h) - S(x)) &= 0 \end{aligned} \quad (3.73)$$

oraz

$$\begin{aligned} V(Z(x+h) - Z(x)) &= 2\gamma_1(h) \\ V(S(x+h) - S(x)) &= 2\gamma_2(h) \end{aligned} \quad (3.74)$$

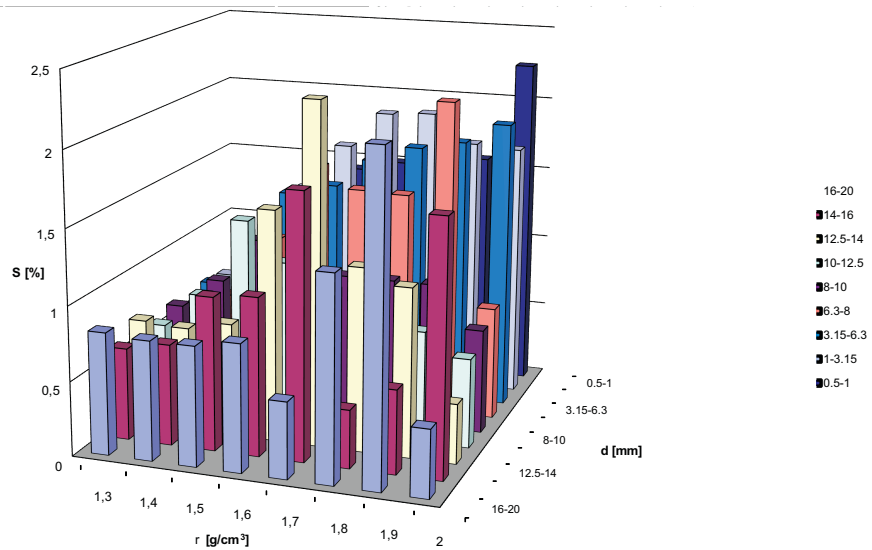
Funkcje  $\gamma_1(h)$  i  $\gamma_2(h)$  są funkcjami wariogramu. Klasyczne estymatory wariogramów empirycznych, zaproponowane przez Matherona, określone są wzorami

$$\gamma_1^*(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} (Z(x_i + h) - Z(x_i))^2, \gamma_2^*(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} (S(x_i + h) - S(x_i))^2 \quad (3.75)$$

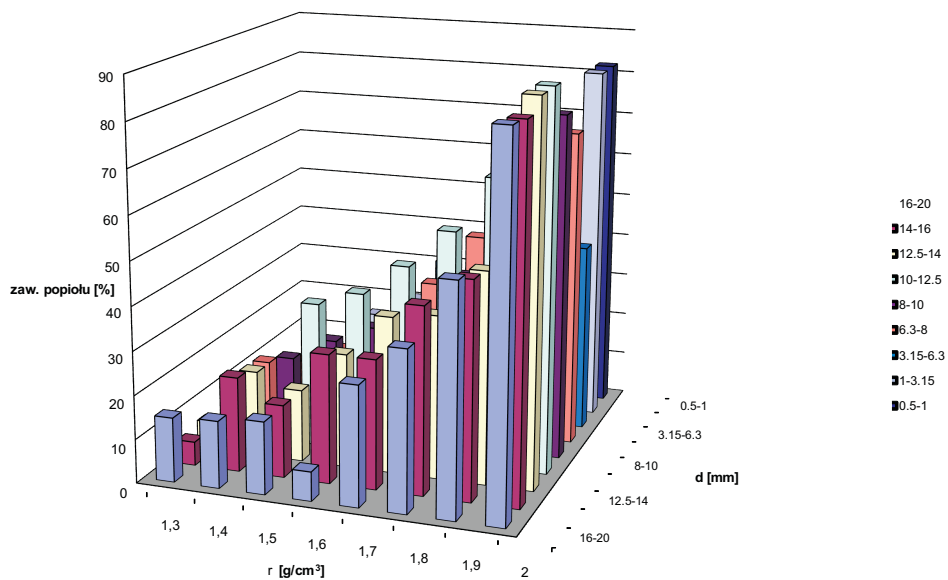
gdzie:  $N(h)$  – liczba par punktów  $(x, x+h)$ , odległych o  $h$ .

Do empirycznych wariogramów określonych wzorem (3.75) należy dopasować pewien model teoretyczny (wzory 2.63a–e).

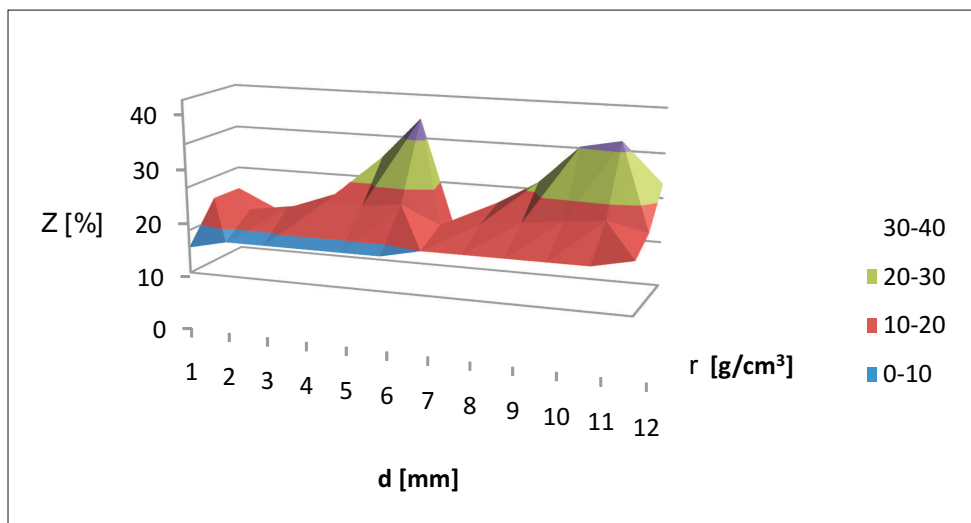
Rozważmy zawartość popiołu i siarki w klasie ziarnowej węgla (16–20) [mm]. Dane pomiarowe zostały przedstawione w tabeli 3.46.



Rys. 3.20. Słupkowa interpretacja powierzchni regresji II rodzaju dla węgla typu 31 – zawartość siarki  
 Fig. 3.20. Histogram interpretation of the II type regressive surface for coal of type 31 – sulfur contents

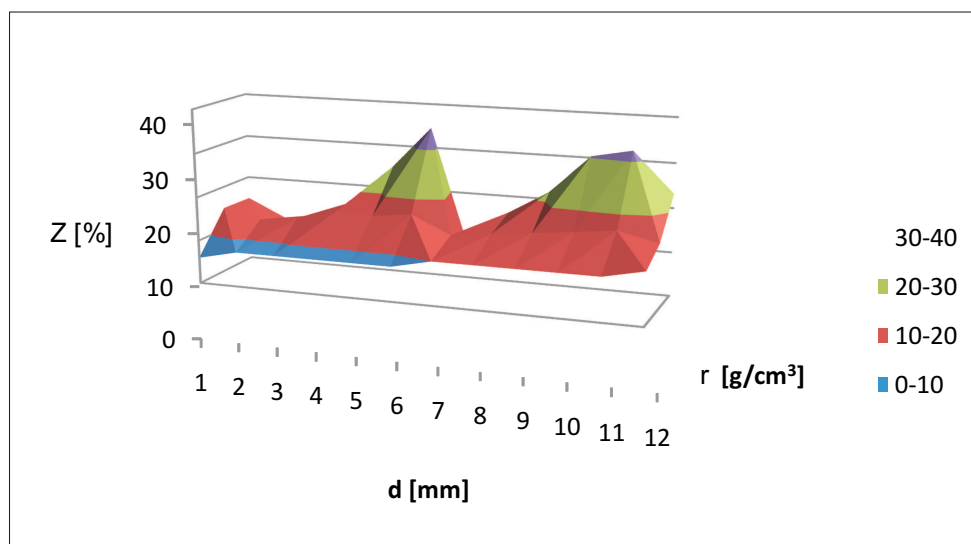


Rys. 3.21. Słupkowa interpretacja powierzchni regresji II rodzaju dla węgla typu 31 – zawartość popiołu  
 Fig. 3.21. Histogram interpretation of the II type regressive surface for coal of type 31 – ash contents



Rys. 3.26. Trójwymiarowa funkcja  $X=(D, P, Z)$  – wyniki empiryczne

Fig. 3.26. Three-dimensional function  $X=(D, P, Z)$  – empirical results



Rys. 3.27. Trójwymiarowa funkcja  $X=(D, P, Z)$  – wyniki aproksymowane

Fig. 3.27. Three-dimensional function  $X=(D, P, Z)$  – approximated results

**Tabela 3.46**

Procentowe zawartości popiołu i siarki dla węgla z klasy ziarnowej 16–20 [mm]

**Table 3.46**

Percentage shares of ash and sulfur for coal of particle size fraction 16–20 [mm]

Gęstość $\rho$ [g/cm <sup>3</sup> ]	Zawartość popiołu [%]	Zawartość siarki [%]
1,3	14,75	0,82
1,4	17,50	0,78
1,5	16,53	0,80
1,6	16,67	0,85
1,7	27,30	0,51
1,8	36,35	1,36
1,9	51,96	2,16

Metodą najmniejszych kwadratów sprawdzono jakość dopasowania różnych modeli wariogramów i najlepszym okazał się model potęgowy. Poprzez linearyzację wyznaczono współczynniki rozpatrywanego modelu i otrzymano wariogram w postaci

$$\gamma(h) = (\gamma_1(h), \gamma_2(h)) = (1152,56h^{1,19}; 1,3733h^{1,32}) \quad (3.76)$$

Współczynnik korelacji dla  $\gamma_1(h)$  wynosił  $r_1 = 0,99$ , a dla  $\gamma_2(h)$ ;  $r_2 = 0,95$ , co świadczy o dobrym doborze modelu. Wartości empirycznych wariogramów oraz ich teoretycznych modeli podaje tabela 3.47.

**Tabela 3.47**

Wartości empirycznych i teoretycznych wariogramów

**Table 3.47**

Values of empirical and theoretical variograms

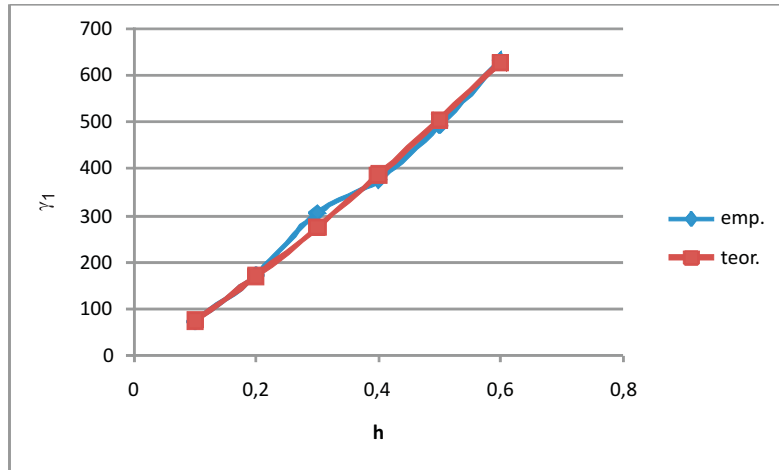
$h$	$\gamma_1^*(h)$ emp.	$\gamma_1(h)$ teor.	$\gamma_2^*(h)$ emp.	$\gamma_2(h)$ teor.
0,1	73,91	74,43	0,0836	0,0657
0,2	172,55	169,83	0,1772	0,1641
0,3	305,67	275,14	0,2629	0,2803
0,4	376,19	387,46	0,3804	0,4097
0,5	493,51	505,30	0,5940	0,5500
0,6	632,19	627,73	0,7978	0,7000

Graficzne porównanie otrzymanych wyników zaprezentowano na rysunkach 3.28 i 3.29.

Następnie, rozwiązując odpowiednie układy równań (wg wzoru 2.72) wyznaczono przewidywaną zawartość popiołu i siarki dla punktu  $x_0 = (18, 2)$  i otrzymano na tej drodze wyniki dla zawartości popiołu i zawartości siarki:

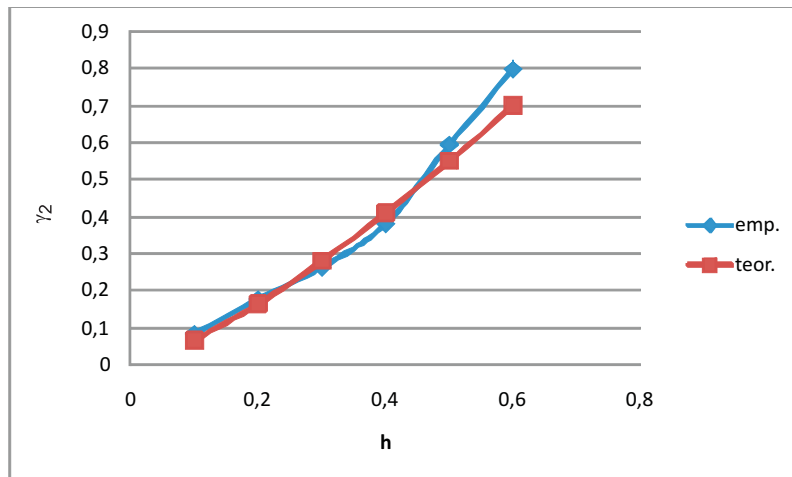
$$Z(18, 2) = 54,80$$

$$S(18, 2) = 2,68.$$



Rys. 3.28. Porównanie empirycznego i teoretycznego wariogramu  $\gamma_1$

Fig. 3.28. Comparison of empirical and theoretical  $\gamma_1$



Rys. 3.29. Porównanie empirycznego i teoretycznego wariogramu  $\gamma_2$

Fig. 3.29. Comparison of empirical and theoretical  $\gamma_2$

Zastosowana metoda kriginu zwyczajnego pozwala z powodzeniem obliczać współrzędne punktów wielowymiarowych. W pracy wymiarami są wybrane charakterystyki materiału uziarnionego, którym był węgiel z jednej z kopalń Górnego Śląska.

### 3.6.4. Zawartość siarki i części lotnych – wariogram potęgowy

W procesach przeróbczych, jednym z największych problemów jest określenie zawartości określonych składników (bądź innych parametrów jakościowych) w materiale uziarnionym poddawany procesowi. Przyjęto oznaczenia:  $D$  – zmienna losowa opisująca wielkość ziarna,  $P$  – zmienna losowa opisująca jego gęstość,  $Z$  – zawartość badanego składnika w danym materiale. Przy założeniu, że o rozdziale materiału uziarnionego (węgla) decydują jego cechy: wielkość ziarna  $D$  i jego gęstość  $P$ , badano zawartość składnika (siarki, części lotne),  $Z_1(d, \rho)$  – dla siarki,  $Z_2(d, \rho)$  – dla części lotnych.

Znając funkcje  $Z_1(d, \rho)$  i  $Z_2(d, \rho)$  można określić zawartość danego składnika w badanym materiale według wzorów

$$Z_1 = \int \int_{\Omega} Z_1(d, \rho) g(d, \rho) d d \rho \quad (3.77)$$

$$Z_2 = \int \int_{\Omega} Z_2(d, \rho) g(d, \rho) d d \rho \quad (3.78)$$

gdzie:  $\Omega$  – obszar określoności wektora  $(D, P)$ ,  
 $g(d, \rho)$  – funkcja gęstości rozkładu dwuwymiarowego zmiennej losowej  $(D, P)$ , którą można określić np. za pomocą funkcji Morgensterna (wzór 3.64).

Funkcje  $Z_1(d, \rho)$  i  $Z_2(d, \rho)$  najczęściej aproksymuje się opierając się na danych doświadczalnych za pomocą dwuwymiarowych funkcji regresji. Ze względu na to, że w danych doświadczalnych dysponuje się pomiarem średniej zawartości danego składnika w każdej z frakcji, których jest określona ilość, to nawet najlepsza z aproksymacji funkcji  $Z_1$  i  $Z_2$  nie daje pewności jak rozkłada się zawartość wewnątrz frakcji.

Poprawę dokładności można by było osiągnąć poprzez zwiększenie ilości frakcji o bardzo małych zakresach zmienności, co nie zawsze jest technicznie możliwe. Określenia zawartości w dodatkowych frakcjach badanych składników można dokonać stosując metodę krigingu zwyczajnego.

Niech  $P_i, i = 1, \dots, n$  oznaczają punkty pomiarowe, gdzie  $P_i = (\rho_i, d_i)$  i niech  $Z(P_i)$  oznacza zawartość składnika w punkcie  $P_i$ . Niech  $P_0 = (\rho_0, d_0)$  jest nowym punktem, w którym należy określić wartość  $Z(P_0)$ .

W tym przypadku dla  $Z^*(P_0)$  zastosowano estymator empiryczny (wzór 2.64), tzn.

$$Z^*(P_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(P_i) \quad (3.79)$$

Przy czym współczynniki  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  wyznaczono z układu równań (2.72).

W tym rozdziale rozważane są modele:

$$\gamma(h) = ce^{ah} \text{ – wykładniczy} \quad (3.80)$$

$$\gamma(h) = ch^a \text{ – potęgowy} \quad (3.81)$$

Estymatorem empirycznym funkcji wariogramu jest wariogram Matherona (Matheron 1989; Namysłowska-Wilczyńska 2006) (wzór 2.62).

$$\gamma^*(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} (Z(P_i + h) - Z(P_i))^2 \quad (3.82)$$

gdzie:  $(P_i + h)$  – punkt odległy od punktu  $P_i$  o wielkość  $h$ ,

$N(h)$  – liczba określająca ilość par punktów odległych od siebie o wielkość  $h$ .

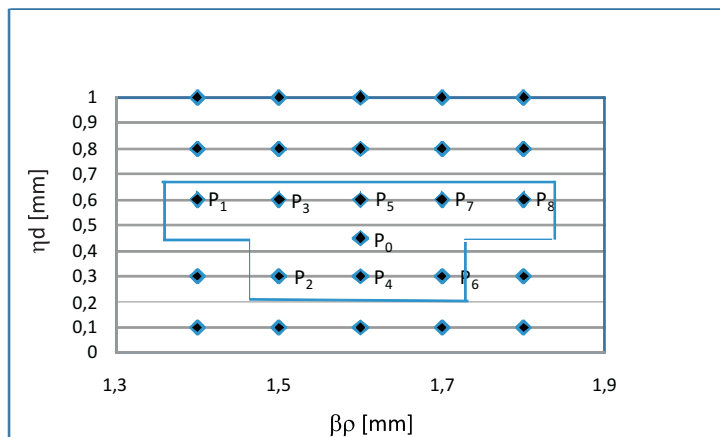
Ze względu na to, że wielkości  $d$  i  $\rho$  są wielkościami mierzalnymi w różnych jednostkach, do określania odległości między punktami zastosowano funkcję (Niedoba 2010, 2011; Niedoba, Tumidajski 2012a, 2012b)

$$\delta(P_i, P_j) = \sqrt{\eta^2 (d_i - d_j)^2 + \beta^2 (\rho_i - \rho_j)^2} \quad (3.83)$$

gdzie:  $\eta$  jest współczynnikiem liczbowym, a  $\beta$  zadane jest w  $\left[ \frac{\text{cm}^3 \text{mm}}{\text{g}} \right]$ . W tym przypadku przyjęto

wartości  $\eta=0,1$  i  $\beta=1$ .

Punkty pomiarowe przedstawione są na rysunku 3.30.



Rys. 3.30. Położenie punktów pomiarowych

Fig. 3.30. Location of measuring points



W tym rozdziale określona zostanie przykładowo zawartość siarki  $Z_1(P_0)$  oraz zawartość części lotnych  $Z_2(P_0)$  w punkcie  $P_0(1,6; 0,5)$ . Dla określenia tych zawartości wzięto pod uwagę punkty, które są oddalone od punktu  $P_0$  o nie więcej niż  $h = 0,3$ .

W obu przypadkach najlepszym modelem wariogramu teoretycznego okazał się wariogram potęgowy.

I tak, dla zawartości siarki wariogram teoretyczny jest zadany wzorem:

$$\gamma_1(h) = 0,6315h^{1,0944} \quad (3.84)$$

Dla zawartości części lotnych wariogram teoretyczny ma postać

$$\gamma_2(h) = 50,6105h^{1,2343} \quad (3.85)$$

Wartości wariogramów empirycznych i teoretycznych przedstawiono w tabeli 3.48.

**Tabela 3.48**

Wartości wariogramów teoretycznych i empirycznych

**Table 3.48**

Values of theoretical and empirical variograms

$h$	$\gamma_1^*(h) \text{ emp}$	$\gamma_1(h) \text{ teor}$	$\gamma_2^*(h) \text{ emp}$	$\gamma_2(h) \text{ teor}$
0,1	0,0562	0,0508	3,0391	2,9508
0,2	0,1004	0,1084	7,0458	6,9423
0,3	0,1530	0,1691	9,0841	11,4512
0,4	0,2138	0,2316	20,8464	16,3320
0,5	0,2973	0,2958	20,5535	21,5119
0,6	0,4192	0,3611	28,0410	26,0410
0,7	0,4287	0,4274	30,8710	30,5870

Wykresy wariogramów teoretycznych i empirycznych przedstawiono na rysunkach 3.31 i 3.32.

Miarą dopasowania wariogramu jest błąd średniokwadratowy, który dla  $\gamma_1(h)$  wyniósł  $s_r = 2,95\%$ , a dla  $\gamma_2(h)$ ,  $s_r = 2,45\%$ .

Wielkość błędów wskazuje na dobrą aproksymację wariogramów empirycznych.

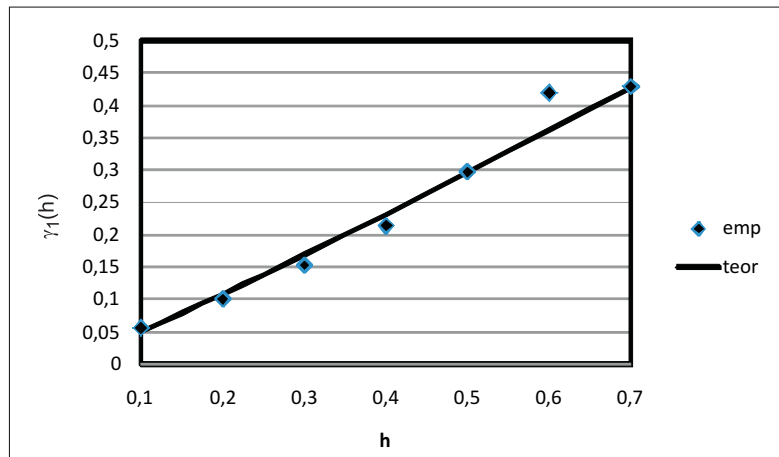
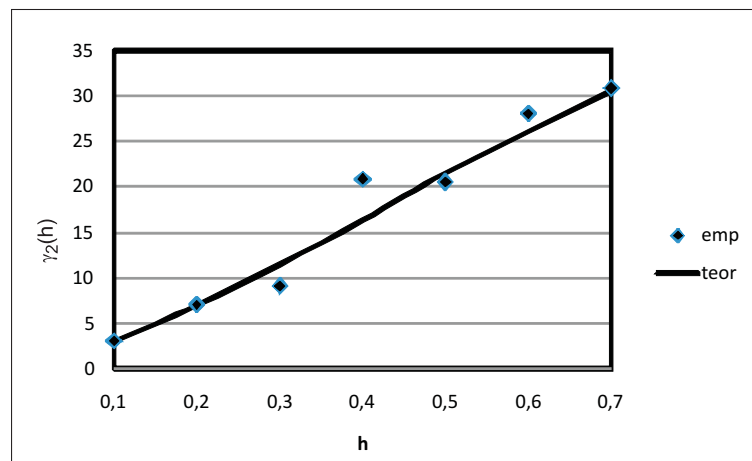
Rozwiązując układ równań (2.72) dla punktu  $P_0(1,6; 0,5)$  otrzymano

$$\begin{aligned} Z_1(P_0) &= \sum_{i=1}^8 \lambda_i Z_1(P_i) = \\ &0,003Z_1(P_1) - 0,045Z_1(P_2) + 0,191Z_1(P_3) + 0,369Z_1(P_4) + 0,333Z_1(P_5) - 0,054Z_1(P_6) + \\ &0,167Z_1(P_7) - 0,035Z_1(P_8) = 1,44 \end{aligned}$$

$$Z_2(P_0) = \sum_{i=1}^8 \lambda_i Z_2(P_i) =$$

$$0,516Z_2(P_1) + 0,960Z_2(P_2) + 0,870Z_2(P_3) - 0,124Z_2(P_4) + 0,236Z_2(P_5) - 0,0001Z_2(P_6) -$$

$$0,247Z_2(P_7) - 0,178Z_2(P_8) = 25,96$$

Rys. 3.31. Wykres funkcji wariogramu  $\gamma_1(h)$ Fig. 3.31. Plot of variogram function  $\gamma_1(h)$ Rys. 3.32. Wykres funkcji wariogramu  $\gamma_2(h)$ Fig. 3.32. Plot of variogram function  $\gamma_2(h)$ 

W celu weryfikacji wybranego modelu dokonano sprawdzenia zawartości badanych składników w kolejnych punktach doświadczalnych bez punktu sprawdzanego (wg wzoru 3.86). Otrzymane wyniki zamieszczono w tabeli 3.49.

**Tabela 3.49**

Porównanie wyników empirycznych i teoretycznych dla zawartości siarki i części lotnych

**Table 3.49**

Comparison of empirical and theoretical results for sulfur and volatile parts contents

$P_i$	Zawartość siarki (empiryczna)	$Z_1(P_i)$	Zawartość części lotnych (empiryczna)	$Z_2(P_i)$
P1	0,67	0,57	32,74	31,27
P2	1,33	1,54	22,54	28,59
P3	1,36	1,27	27,91	26,94
P4	1,66	1,65	26,87	25,62
P5	1,55	1,58	25,56	26,82
P6	1,91	1,84	25,98	26,53
P7	1,64	1,65	24,81	26,01
P8	1,75	1,71	25,71	24,88

$$Z(P_i) = \sum_{j \neq i} \lambda_j Z(P_j) \quad (3.86)$$

Wielkość błędów aproksymacji  $s_r = 0,107\%$  dla siarki oraz  $s_r = 1,28\%$  dla zawartości ciał lotnych pozwala wnioskować o dobrym doborze modelu krigingowego dla rozpatrywanego przykładu.

Zastosowanie metod krigingu do zagadnień związanych z przeróbką surowców mineralnych pozwala na lepszą aproksymację zależności między właściwościami badanego materiału. Pozwala na utworzenie większej liczby danych pomiarowych, które mogą pozwolić na podział badanego materiału na węższe frakcje, a więc na bardziej precyzyjne modelowanie różnego rodzaju krzywych i powierzchni stosowanych w przeróbce surowców mineralnych.

Okazało się, że technika ta – stosowana głównie w geostatystyce – może również zostać wykorzystana w badaniach materiałów uziarnionych. Potencjalne wykorzystanie tej techniki w przeróbce surowców mineralnych – a zwłaszcza w przeróbce węgla – jest bardzo duże.

#### 4. Metody wizualizacji wielowymiarowych charakterystyk materiałów uziarnionych

W prezentowanym rozdziale monografii zostaną przedstawione metody wizualizacji wielowymiarowych danych, które także pozwalają przeprowadzać porównania rozważanych zestawów danych oraz stwierdzić możliwość ich klasyfikacji, czyli są pewną kontynuacją i rozwinięciem omawianych wyżej metod.

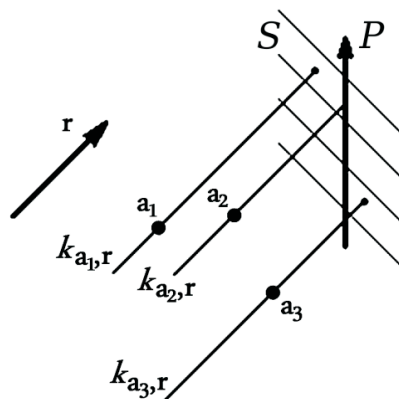
Jakościową analizę wielowymiarowych danych (właściwości materiału) uzyskanych w wyniku badań empirycznych, można uzyskać stosując metody wielowymiarowej wizualizacji. Wyniki tych analiz mogą być pomocne zarówno przy charakterystyce materiałów, jak również przy budowie – na ich podstawie – modeli procesów przerobczych.

Próby zobrazowania danych wielowymiarowych były prowadzone przy wielu okazjach. Jedną z metod dających możliwość uzyskania obrazu takich danych była metoda *grand-tour*, która dawała ciągłą, jednoparametryczną rodzinę  $d$ -wymiarowych projekcji  $n$ -wymiarowych danych. Została ona opisana po raz pierwszy przez Asimova (Asimov 1985), następnie udoskonalana przez wielu autorów (Buja, Asimov 1985; Cook i in. 1995; Hurley, Buja 1990). Inną metodą była metoda głównych składowych PCA (*Principal component analysis*) (Li i in. 2000), która korzystała z ortogonalnej projekcji zbioru obserwacji na płaszczyznę reprezentowaną przez specjalnie dobrane wektory, które są wektorami własnymi odpowiadającymi dwóm największym wartościom własnym macierzy kowariancji zbioru obserwacji. Zastosowanie sieci neuronów do wizualizacji danych (Jain, Mao 1992; Kraaijveld i in. 1995; Mao, Jain 1995; Aldrich 1998) oparte jest na procesie transformacji przestrzeni  $n$ -wymiarowych danych na przestrzeń dwuwymiarową poprzez zastosowanie sieci neuronowej. Kolejną z metod uzyskiwania obrazu wizualizacji danych wielowymiarowych jest metoda osi równoległych (Chatterjee i in. 1993; Gennings i in. 1990; Inselberg 1985; Inselberg i in. 1994; Wegman 1990; Chou i in. 1999). W metodzie tej na zadanej płaszczyźnie wszystkie osie współrzędnych są umieszczone równoległe do siebie. Podobną do tej metody jest metoda oparta na tzw. grafie gwiazdy (*star graph*) (Sobol, Klein 1989). W tej metodzie,  $n$  osi współrzędnych „promieniuje” z punktu centralnego, dzieląc okrąg na  $n$  równych części. Skalowanie wielowymiarowe (Kim i in. 2000) również jest stosowane do celów wizualizacji danych. W metodzie tej punkty są umieszczane na płaszczyźnie tak, aby odległość między dowolnymi dwoma punktami była jak najbardziej zbliżona do ich odległości w wielowymiarowej przestrzeni, w której początkowo się znajdowały. W metodzie macierzy rozrzutu (*scatter plot matrices*) (Becker i in. 1987; Cleveland 1984; Eick, Wills

1995), zbiór danych wielowymiarowych jest przedstawiony poprzez ciąg dwuwymiarowych zależności. W metodzie, która korzysta z tzw. map odniesienia (*relevance maps*) (Assa i in. 1997, 1999) specjalne punkty  $F_1, F_2, \dots, F_n$ , reprezentujące poszczególne cechy są umieszczone na płaszczyźnie wizualizującej dane. Rozmieszczenie punktów reprezentujących wielowymiarowe dane pokazuje w pewien sposób związki pomiędzy rozpatrywanymi danymi i cechami w taki sposób, aby im bardziej jest istotna cecha w badanym obiekcie tym bliżej punkt  $F_i$  powinien być umieszczony. Kolejną metodą wizualizacji jest metoda mozaiki (*mosaic plots*) (Hartigan, Kleiner 1981; Heike 2000), która jest naturalnym rozszerzeniem 1-wymiarowych wykresów słupkowych. Ponadto, możliwa jest również wizualizacja wielowymiarowych brył (Jamróz 2009). Metoda tuneli obserwacyjnych (Jamróz 2001) daje możliwość uzyskania widoków obserwowanych zbiorów danych wielowymiarowych wykorzystując promień tunelu. Metoda ta zostanie szerzej przedstawiona w dalszej części rozdziału monografii.

#### 4.1. Metoda tuneli obserwacyjnych

Teoretyczna baza metody tuneli obserwacyjnych została opisana w pracy doktorskiej (Jamróz 2001). Intuicyjnie, można powiedzieć, że metoda ta korzysta z projekcji równoległych z lokalną ortogonalną projekcją o zakresie określonym przez maksymalny promień tunelu. Rozwiązanie to daje możliwość obserwacji wybranych części przestrzeni, która zawiera istotne informacje, co nie jest możliwe przy zastosowaniu, np. projekcji ortogonalnej. Metoda projekcji została zobrazowana poglądowo na rysunku 4.1. Aby całkowicie zrozumieć mechanizm działania tej metody, konieczne jest wprowadzenie instrumentów matematycznych stosowanych do opisu przestrzeni, w której obserwator chce umieścić obserwowane obiekty.



Rys. 4.1. Linia równoległa do  $r$  i przechodząca przez  $a$

Fig. 4.1. Line parallel to  $r$  and crossing through  $a$

Definicje związane z tą metodą są wymienione poniżej:

*Def.* Przestrzeń obserwowana  $X$  jest zdefiniowana jako dowolna przestrzeń wektorowa nad ciałem  $F$  liczb rzeczywistych,  $n$ -wymiarowa,  $n \geq 3$ , z iloczynem skalarnym.

*Def.* Niech  $p_1, p_2 \in X$  – liniowo niezależne,  $w \in X$ . *Płaszczyzna obserwacyjna*  $P \subset X$  jest zdefiniowana jako:  $P = \delta(w, \{p_1, p_2\})$ , gdzie:

$$\delta(w, \{p_1, p_2\}) \stackrel{def}{=} \{x \in X : \exists \beta_1, \beta_2 \in F \text{ takie, że } x = w + \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2\} \quad (4.1)$$

Płaszczyzna obserwacyjna  $P$  zdefiniowana w ten sposób może być użyta jako ekran, przez który można zobaczyć dowolny obiekt umieszczony w przestrzeni  $X$ . Wektor  $w$  określa pozycję środka ekranu, zaś  $p_1, p_2$  określają jego położenie.

*Def.* Właściwy kierunek rzutowania  $r$  na płaszczyznę obserwacyjną  $P = \delta(w, \{p_1, p_2\})$  jest zdefiniowany jako dowolny wektor  $r \in X$ , taki że wektory  $\{p_1, p_2, r\}$  są zbiorem ortogonalnym.

*Def.* Następujący zbiór jest nazywany *hiperpowierzchnią*  $S_{(s,d)}$ , zakotwiczoną w  $s \in X$  i skierowaną w kierunku  $d \in X$ :

$$S_{(s,d)} \stackrel{def}{=} \{x \in X : (x-s, d) = 0\} \quad (4.2)$$

Przyjmijmy na chwilę, że przestrzeń obserwowana  $X$  jest trójwymiarowa (przykład zakładający większą liczbę wymiarów byłby znacznie trudniejszy do przedstawienia), oraz że płaszczyzna obserwacyjna  $P$  jest jednowymiarowa (tzn. istnieje możliwość obserwacji wielowymiarowej rzeczywistości nie przez fragment dwuwymiarowej płaszczyzny reprezentującej ekran, ale poprzez fragment linii). Dodatkowo rozważmy wektor  $r$ , który jest właściwym kierunkiem rzutowania na płaszczyznę obserwacyjną  $P$ . Należy zdefiniować jeszcze  $k_{a,r}$  (tzn. linię równoległą do  $r$  i przechodzącą przez  $a$ ) dla obserwowanego punktu  $a$ . Jak pokazano na rysunku 4.1 linia  $k_{a,r}$  nie musi mieć punktów wspólnych z  $P$ . Jednakże  $k_{a,r}$  ma zawsze jeden punkt wspólny z hiperpowierzchnią  $S$ , która zawiera w sobie  $P$  i jest ortogonalna do  $r$ .

Na rysunku widać, że rozważana linia  $k_{a,r}$  nie musi mieć punktów wspólnych z  $P$ , jednakże zawsze ma jeden punkt wspólny z hiperpowierzchnią  $S$ , zawierającą w sobie  $P$  i będącą ortogonalną w stosunku do  $r$ . W pokazanym przypadku jedynie punkt  $a_2$  będzie widoczny na płaszczyźnie obserwacyjnej  $P$ .

W praktyce, tylko przy niewielu ustawieniach płaszczyzny obserwacyjnej  $P$  można zobaczyć jakiegokolwiek punkty. W celu uniknięcia takiej sytuacji założono, że w danym punkcie płaszczyzny obserwacyjnej  $P$  będą widoczne nie tylko punkty zlokalizowane na liniach równoległych do  $r$  i przechodzących przez  $P$ , ale również punkty, które są zlokalizowane na liniach równoległych do  $r$  i przechodzących przez  $S$  (tzn. hiperpowierzchnię zawierającą w sobie  $P$  i będącą ortogonalną do  $r$ ) w odległości mniejszej od płaszczyzny

obserwacyjnej  $P$  niż pewna ustalona wartość. Wartość ta dla obserwowanego punktu  $a$  będzie reprezentowana przez wektor  $b_a$ , nazywany promieniem tunelu.

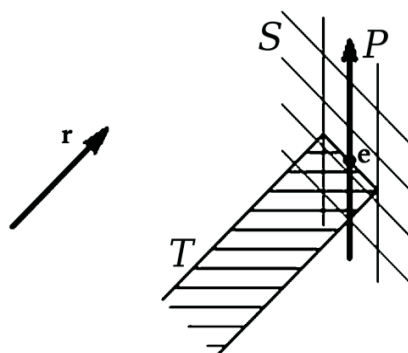
*Def.* Promień tunelu punktu  $a \in X$  dla płaszczyzny obserwacyjnej  $P = \delta(w, \{p_1, p_2\})$  jest zdefiniowany jako:

$$b_a = \psi r + a - w - \beta_1 p_1 - \beta_2 p_2, \text{ gdzie:} \quad (4.3)$$

$$\psi = \frac{(w-a, r)}{(r, r)}, \quad \beta_1 = \frac{(\psi r + a - w, p_1)}{(p_1, p_1)}, \quad \beta_2 = \frac{(\psi r + a - w, p_2)}{(p_2, p_2)}$$

$r \in X$  – właściwy kierunek rzutowania na płaszczyznę obserwacyjną  $P$ .

W przypadku zilustrowanym na rysunku 4.2 w punkcie  $e$  płaszczyzny obserwacyjnej  $P$  (w rozważanym przykładzie dla uproszczenia  $P$  jest jednowymiarowa), będą widoczne wszystkie punkty zlokalizowane w tunelu, który przecina tę płaszczyznę w punkcie  $e$  i który rozciąga się wzdłuż kierunku rzutowania  $r$ . W rzeczywistości, przy dwuwymiarowej płaszczyźnie obserwacyjnej  $P$  w danym punkcie  $e$  tej płaszczyzny, widoczne będą wszystkie punkty zlokalizowane w tunelu, którego przekrój jest  $(n-3)$ -wymiarową kulą i który rozciąga się wzdłuż kierunku rzutowania  $r$ .



Rys. 4.2. Tunel T dla punktu  $e$

Fig. 4.2. Tunnel T for point  $e$

Tunelem na rysunku 4.2 jest zakreskowana powierzchnia  $T$ . Wszystkie punkty, które znajdują się w tunelu  $T$  będą widoczne w punkcie  $e$  na płaszczyźnie obserwacyjnej  $P$ .

#### 4.2. Procedura rysowania

Poniższy algorytm służy do narysowania projekcji punktu obserwowanego  $a$ , zgodnie z kierunkiem rzutowania  $r$  na płaszczyznę obserwacyjną  $P = \delta(w, \{p_1, p_2\})$ :

1. Odległość rzutu punktu obserwowanego  $a$  oblicza się za pomocą wzoru:

$$\psi = (w - a, r) / (r, r).$$

2. Położenie rzutu punktu obserwowanego  $a$  (para  $\beta_1, \beta_2 \in F$ ) oblicza się za pomocą wzorów:  $\beta_1 = (\psi r + a - w, p_1) / (p_1, p_1)$ ,  $\beta_2 = (\psi r + a - w, p_2) / (p_2, p_2)$ .

3. Promień tunelu  $b_a$  punktu  $a$  należy obliczyć korzystając ze wzoru:

$$b_a = \psi r + a - w - \beta_1 p_1 - \beta_2 p_2.$$

4. W tym miejscu należy sprawdzić, czy iloczyn skalarny  $(b_a, b_a)$  jest mniejszy niż przyjęty maksymalny promień tunelu i czy odległość rzutu punktu obserwowanego  $a$  jest mniejsza niż przyjęty maksymalny zasięg. Jeżeli warunki te są spełnione, należy narysować punkt na płaszczyźnie obserwacyjnej  $P = \delta(w, \{p_1, p_2\})$  w pozycji o współrzędnych  $(\beta_1, \beta_2)$ , w przeciwnym wypadku punkt nie powinien być rysowany.

Iloczyn skalarny należy obliczyć korzystając ze wzoru:  $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ , gdzie:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ,  $n$  – liczba wymiarów,  $n \geq 3$ .

### 4.3. Wizualizacja siedmiowymiarowych danych

Metoda tuneli obserwacyjnych została zastosowana do wielowymiarowej analizy węgla trzech typów (patrz załącznik). Każdy z siedmiu parametrów opisujących analizowany materiał został potraktowany jako oddzielny wymiar. Utworzono zatem siedmiowymiarową przestrzeń. Rysunki 4.3–4.5 przedstawiają wyniki doświadczalne dla wszystkich typów węgla, a więc dla węgla typu 31 (72 próbki), 34.2 (61 próbek) oraz 35 (72 próbki). Niższa ilość wyników dla węgla typu 34.2 wiąże się z tym, że niektórych wyników dla tego materiału zabrakło. Rysunek 4.3 przedstawia widok, na podstawie którego widać, że dane dotyczące węgla typu 31 są zlokalizowane w innej części przestrzeni niż dane dla węgla typu 35.

Na podstawie analizowanych obrazów można stwierdzić, że przyjęte parametry są wystarczające do prawidłowej identyfikacji, czy dana próbka należy do węgla typu 31 czy węgla typu 35. Na rysunku 4.4 uzyskano widok pozwalający stwierdzić, że dane dla węgla typu 35 zajmują inny obszar przestrzeni niż dane dotyczące węgla 34.2. Z kolei rysunek 4.5 przedstawia widok pozwalający stwierdzić, że dane dla węgla typu 31 zajmują inny obszar przestrzeni niż dane dotyczące węgla typu 34.2. Z tych trzech widoków można więc wnioskować, że przyjęte parametry są wystarczające do prawidłowej identyfikacji czy dana próbka należy do węgla typu 31, 34.2, czy też 35. Jednocześnie nie udało się uzyskać jednego widoku, z którego mógłby wynikać powyższy wniosek. Świadczyć to może o skomplikowanej strukturze analizowanych danych.

Do wizualizacji powyższych danych użyto również metody osi równoległych. W metodzie tej na płaszczyźnie rozmieszczonych jest  $n$  równoległych osi odpowiadających  $n$  wymiarom przestrzeni. Jeden punkt przestrzeni reprezentowany jest przez krzywą łamaną.





Rys. 4.3. Uzyskany widok, z którego wynika, że dane dla węgla typu 31 (punkty szare) zajmują inny obszar przestrzeni niż dane dla węgla typu 35 (punkty jasne – skupione w dwóch grupach/podobszarach przestrzeni)

Fig. 4.3. The obtained view, from which it occurs that the data for coal of type 31 (gray spots) are located in other part of the space than data for coal of type 35 (bright spots – accumulated in two groups/subareas of the space)



Rys. 4.4. Widok, z którego wynika, że dane dla węgla typu 34.2 (punkty czarne) zajmują inny obszar przestrzeni niż dane dla węgla 35 (punkty jasne)

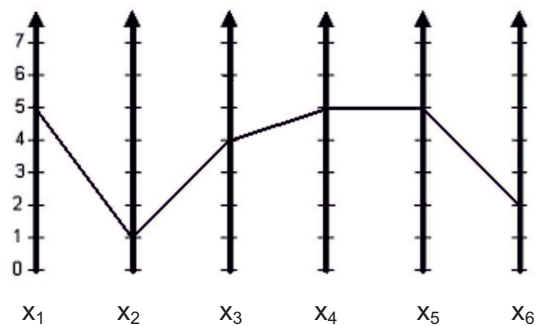
Fig. 4.4. View from which it occurs that the data for coal of type 34.2 (black spots) are located in other part of the space than data for coal of type 35 (bright spots)



Rys. 4.5. Widok, z którego wynika, że dane dla węgla typu 31 (punkty szare) zajmują inny obszar przestrzeni niż dane dotyczące węgla typu 34.2 (punkty czarne)

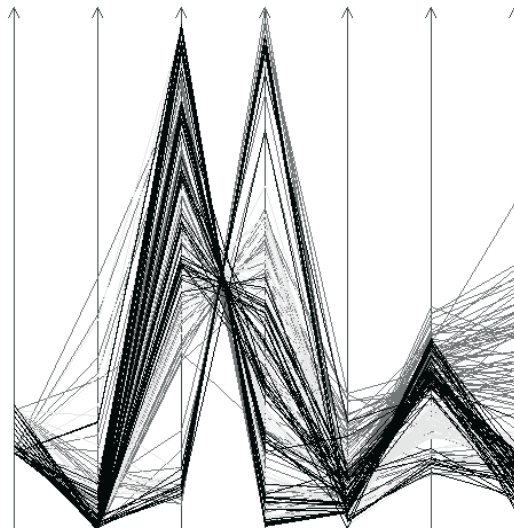
Fig. 4.5. View, from which it occurs that data for coal of type 31 (gray spots) are located in other part of the space than data for coal of type 34.2 (black spots)

Krzywa ta przechodzi przez każdą  $i$ -tą oś w miejscu, które odpowiada wartości  $i$ -tej współrzędnej punktu. Rysunek 4.6 przedstawia ideę tej metody.



Rys. 4.6. Metoda osi równoległych. Jeden przykładowy, sześciowymiarowy punkt o współrzędnych (5, 1, 4, 5, 5, 2) reprezentowany jest jako łamana złożona z 5 odcinków łączących 6 punktów na płaszczyźnie, po jednym punkcie na każdej z równoległych osi. Położenie punktu na  $i$ -tej osi odpowiada  $i$ -tej współrzędnej sześciowymiarowego punktu

Fig. 4.6. Parallel coordinates method. One example, six-dimensional point of the coordinates (5, 1, 4, 5, 5, 2) is represented as polyline constructed from 5 segments joining 6 points on the surface, by one point on each parallel axes. The location of point on  $i$ <sup>th</sup> axis refers to  $i$ <sup>th</sup> coordinate of six-dimensional point



Rys. 4.7. Widok danych dla węgla typu 31 (punkty szare), 34.2 (punkty czarne) oraz 35 (punkty jasne)

Fig. 4.7. View of data for coal of type 31 (gray spots), 34.2 (black spots) and 35 (bright spots)

Na rysunku 4.7 przedstawiono widok analizowanych siedmiowymiarowych danych przy użyciu metody osi równoległych. Na podstawie tego widoku nie można stwierdzić, czy próbki poszczególnych typów węgla można od siebie odseparować. Można natomiast stwierdzić, że przed dalszą analizą warto dane jeszcze raz przeskalować tak, by zakres wartości zmieniał się w każdej współrzędnej przestrzeni podobnie. W ten sposób uzyskamy sytuację, w której niezależnie od wyboru metryki każdy z parametrów będzie miał podobną wagę przy ocenie/klasyfikacji danych.

#### 4.4. Wizualizacja siedmiowymiarowych danych dla węgla z podziałem na klasy ziarnowe

Widok danych dla węgla typu 31, z podziałem na klasy ziarnowe przedstawiono na rysunku 4.8. Widzimy tutaj 9 klas – punkty danego odcienia jasności reprezentują próbki tej samej klasy. Przy takim podejściu nie udało się uzyskać widoków, z których można by wyciągać wnioski.

Wnioski udało się uzyskać dopiero przy podejściu, w którym analizujemy rozłączność klas ziarnowych parami. Na rysunku 4.9 pokazano taką parę: klasy 20–16 mm oraz 16–14 mm. Na podstawie tego widoku można stwierdzić, że punkty reprezentujące te klasy zajmują osobne podobszary przestrzeni, a przyjęte parametry są wystarczające do prawidłowej identyfikacji czy dana próbka należy do klasy ziarnowej 20–16 mm czy 16–14 mm. Na



Rys. 4.8. Widok danych dla węgla typu 31 z podziałem na klasy ziarnowe. Punkty danego odcienia jasności reprezentują próbki tej samej klasy. Zbyt duża liczba klas powoduje, że widok nie jest czytelny

Fig. 4.8. View of data for coal of type 31 with division into particle fractions. The spots of certain level of brightness represent the samples of the same fraction. Too large number of fractions causes that the view is not clear



Rys. 4.9. Widok danych dla węgla typu 31, dwie klasy ziarnowe: 20–16 mm (czarne punkty) oraz 16–14 mm (jasne punkty). Widać, że punkty reprezentujące klasę 20–16 mm gromadzą się w dwóch grupach oddzielonych przez grupę reprezentującą klasę 16–14 mm

Fig. 4.9. View of data for coal of type 31, two particle fractions: 20–16 (black spots) and 16–14 (bright spots). It is visible that the spots representing the fraction 20–16 gather in two groups separated by the group representing fraction 16–14 mm

rysunku 4.10 pokazano widoki wszystkich pozostałych par z klasą ziarnową 20–16 mm. Na podstawie każdego z tych obrazów możemy stwierdzić, że przyjęte parametry są wystarczające do prawidłowej identyfikacji klasy ziarnowej, do której należy dana próbka.

Możemy to stwierdzić, ponieważ widać na nich, że każda klasa w parze zajmuje osobne podobszary przestrzeni. Jeśli więc klasa ziarnowa 20–16 mm z każdą inną klasą zajmuje osobną część przestrzeni to oznacza, że przyjęte parametry są wystarczające do prawidłowej identyfikacji czy dana próbka należy klasy ziarnowej 20–16 mm.



Rys. 4.10. Porównanie obrazów dla węgla typu 31 z wybranymi dwoma klasami ziarnowymi

Fig. 4.10. Comparison of the images for coal of type 31 with two chosen particle fractions.

Przeprowadzając podobną analizę dla każdej pary klas ziarnowych można stwierdzić, że przyjęte parametry opisujące próbki materiału są wystarczające do właściwej identyfikacji każdej klasy ziarnowej.

Na bazie siedmiowymiarowej wizualizacji metodą tuneli obserwacyjnych otrzymano widoki dla wszystkich par typów węgla, co pozwala stwierdzić, że przyjęte parametry opisowe są wystarczające do właściwej identyfikacji typu węgla, z którego pobrana została próbka.

Nie udało się jednak otrzymać jednego widoku pozwalającego na identyfikację wszystkich trzech typów węgla za jednym podejściem. Oznacza to, że struktura analizowanych danych jest skomplikowana.

Na podstawie wizualizacji siedmiowymiarowych danych, dla poszczególnych typów węgla podzielonych na klasy ziarnowe nie było możliwe osiągnięcie klarownego widoku dla wszystkich klas łącznie. Było to możliwe, gdy klasy ziarnowe porównywano parami. Oznacza to, że przyjęte parametry opisowe są wystarczające do właściwej identyfikacji klasy ziarnowej, z której pobrana została próbka.

Na podstawie metody osi równoległych nie było możliwe stwierdzenie, czy można prawidłowo rozpoznać pochodzenie próbki węgla na podstawie obrazu w momencie gdy wszystkie węgle były analizowane razem. Aby to było możliwe należy dokonać przeskalowania danych w sposób zapewniający każdemu parametrowi jednakową wagę w znaczeniu jego istotności.

Wyniki wizualizacji otrzymane metodą tuneli obserwacyjnych udowodniły, że na podstawie zebranych danych można uzyskać właściwe modele matematyczne opisujące procesy przerobcze surowców mineralnych.

Otrzymane wyniki były zachętą do sprawdzenia, czy do identyfikacji typu węgla konieczne jest zastosowanie wszystkich zebranych danych, czy też wystarczy w tym celu kilka z nich. Należało więc sprawdzić, czy dane dla poszczególnych węgli wykazywały istotne powiązania między poszczególnymi jego cechami.

W celu sprawdzenia powiązań pomiędzy poszczególnymi cechami węgla obliczono macierz korelacji cząstkowych dla każdego typu węgla. Do każdej z macierzy wykorzystano dane każdej klasy ziarnowej (9 klas po 8 frakcji gęstościowych = 72 dane, dla węgla typu 34.2 brakowało kilku pomiarów, stąd w tym przypadku liczba danych = 61) dla każdego z badanych typów węgla. Macierze korelacji przedstawiono w tabelach 4.1–4.3.

Tabela 4.1

Macierz korelacji dla węgla typu 31

Table 4.1

Correlation matrix for type of coal 31

	Gęstość [Mg/m <sup>3</sup> ]	Masa [g]	Ciepło spalania [cal]	Zawartość popiołu [%]	Zawartość siarki [%]	Zawartość części lotnych $V^a$	Wilgoć analityczna $W_a$	Wielkość ziarna $d$
Gęstość [Mg/m <sup>3</sup> ]	1,00	-0,22	-0,92	0,92	0,53	-0,81	-0,86	-0,08
Masa [g]	-0,22	1,00	0,21	-0,19	-0,29	0,21	0,21	-0,29
Ciepło spalania [cal]	-0,92	0,21	1,00	-0,97	-0,36	0,89	0,89	-0,08
Zawartość popiołu [%]	0,92	-0,19	-0,97	1,00	0,36	-0,93	-0,92	0,06
Zawartość siarki [%]	0,53	-0,29	-0,36	0,36	1,00	-0,24	-0,37	-0,31
Zawartość części lotnych $V^a$	-0,81	0,21	0,89	-0,93	-0,24	1,00	0,86	-0,03
Wilgoć analityczna $W_a$	-0,86	0,21	0,89	-0,92	-0,37	0,86	1,00	-0,10
Wielkość ziarna $d$	-0,08	-0,29	-0,08	0,06	-0,31	-0,03	-0,10	1,00

Warto zwrócić także uwagę na statystyki opisowe rozważanych zmiennych. Ich charakterystyki przedstawiono w tabelach 4.4–4.6.

Na podstawie wyników analizy korelacji widać wyraźnie, że silnie skorelowanymi cechami węgla są gęstość, ciepło spalania, zawartość popiołu oraz zawartość części lotnych. Można więc domniemywać, że w celu identyfikacji typu węgla nie jest konieczny wybór łączny wszystkich tych cech, ale można wybrać jedną z nich. Aby dokonać wielowymiarowej analizy przedstawionych wyżej danych, opisujących parametry węgla, zastosowano metodę Tuneli Obserwacyjnych, służącą do ich wizualizacji. Każdy z siedmiu parametrów stanowił jeden wymiar. Na początku sprawdzono, czy informacje zawarte we wszystkich parametrach są wystarczające do prawidłowej identyfikacji rodzaju węgla. Powstała więc siedmiowymiarowa przestrzeń. Okazało się, że przyjęte parametry są wystarczające do prawidłowej identyfikacji czy dana próbka należy do węgla 31, 34.2, czy 35. Rysunek 4.11

**Tabela 4.2**

Macierz korelacji dla węgla typu 34.2

**Table 4.2**

Correlation matrix for type of coal 34.2

	Gęstość [Mg/m <sup>3</sup> ]	Masa [g]	Ciepło spalania [cal]	Zawartość popiołu [%]	Zawartość siarki [%]	Zawartość części lotnych $V^a$	Wilgoć analityczna $W_a$	Wielkość ziarna $d$
Gęstość [Mg/m <sup>3</sup> ]	1,00	-0,47	-0,96	0,93	0,20	-0,70	-0,44	-0,08
Masa [g]	-0,47	1,00	0,37	-0,35	-0,30	0,29	0,06	-0,18
Ciepło spalania [cal]	-0,96	0,37	1,00	-0,99	-0,12	0,82	0,42	0,01
Zawartość popiołu [%]	0,93	-0,35	-0,99	1,00	0,12	-0,85	-0,41	-0,02
Zawartość siarki [%]	0,20	-0,30	-0,12	0,12	1,00	-0,05	-0,12	-0,29
Zawartość części lotnych $V^a$	-0,70	0,29	0,82	-0,85	-0,05	1,00	0,29	-0,07
Wilgoć analityczna $W_a$	-0,44	0,06	0,42	-0,41	-0,12	0,29	1,00	0,44
Wielkość ziarna $d$	-0,08	-0,18	0,01	-0,02	-0,29	-0,07	0,44	1,00

**Tabela 4.3**

Macierz korelacji dla węgla typu 35

**Table 4.3**

Correlation matrix for type of coal 35

	Gęstość [Mg/m <sup>3</sup> ]	Masa [g]	Ciepło spalania [cal]	Zawartość popiołu [%]	Zawartość siarki [%]	Zawartość części lotnych $V^a$	Wilgoć analityczna $W_a$	Wielkość ziarna $d$
Gęstość [Mg/m <sup>3</sup> ]	1,00	-0,14	-0,98	0,97	0,30	-0,88	0,32	-0,08
Masa [g]	-0,14	1,00	0,05	-0,04	-0,40	0,02	-0,18	-0,28
Ciepło spalania [cal]	-0,98	0,05	1,00	-1,00	-0,15	0,93	-0,29	0,04
Zawartość popiołu [%]	0,97	-0,04	-1,00	1,00	0,13	-0,94	0,28	-0,04
Zawartość siarki [%]	0,30	-0,40	-0,15	0,13	1,00	0,01	0,18	-0,10
Zawartość części lotnych $V^a$	-0,88	0,02	0,93	-0,94	0,01	1,00	-0,21	0,05
Wilgoć analityczna $W_a$	0,32	-0,18	-0,29	0,28	0,18	-0,21	1,00	0,55
Wielkość ziarna $d$	-0,08	-0,28	0,04	-0,04	-0,10	0,05	0,55	1,00

**Tabela 4.4**

Opis statystyczny dla węgla typu 31

**Table 4.4**

Statistical description for coal of type 31

Parametr	Masa [g]	Ciepło spalania [cal]	Zawartość popiołu [%]	Zawartość siarki [%]	Części lotne $V^a$ [%]	Wilgoć analit. $W_a$
Średnia	502,8439	4827,682	30,59167	1,139697	26,13288	2,875455
Odch. stand.	859,7737	1928,198	22,79824	0,495183	6,577693	0,939385
Skośność	2,712474	-0,709	0,968895	0,541001	-1,03491	-0,20851
Kurtoza	7,474541	-0,14403	0,481473	-0,76674	0,722729	0,018796
Max	4187,8	7518	86,59	2,28	37,04	5,41
Min	7,1	433	1,25	0,39	9,3	0,91
Rozstęp	4180,7	7085	85,34	1,89	27,74	4,5

**Tabela 4.5**

Opis statystyczny dla węgla typu 34.2

**Table 4.5**

Statistical description for coal of type 34.2

Parametr	Masa [g]	Ciepło spalania [cal]	Zawartość popiołu [%]	Zawartość siarki [%]	Części lotne $V^a$ [%]	Wilgoć analit. $W_a$
Średnia	170,4576	5515,985	27,86561	0,566364	24,65967	0,942097
Odch. stand.	345,011	2390,505	23,88707	0,347047	5,660467	0,281222
Skośność	3,59979	-0,75153	1,03294	1,286094	-1,4801	0,347979
Kurtoza	14,49382	-0,21618	0,352019	2,26671	1,582519	0,753901
Max	1817,9	8367	81,97	1,81	31,87	1,87
Min	2,2	591	0,79	0,05	9,77	0,37
Rozstęp	1815,7	7776	81,18	1,76	22,1	1,5

przedstawia przykładowy wynik eksperymentów, biorących pod uwagę dane ze wszystkich trzech typów węgla: 34.2 (61 próbek), 35 (72 próbki) i 31 (72 próbki).

Następnie usunięto z danych ostatni parametr, czyli wilgoć analityczną. Powstała więc przestrzeń sześciowymiarowa. Rysunki 4.12 i 4.13 przedstawiają wyniki eksperymentów dla powstałych w ten sposób danych sześciowymiarowych. Na rysunku 4.12 uzyskano widok, z którego wynika, że dane dotyczące węgla 31 zajmują inny obszar przestrzeni niż węgiel 35. Na podstawie tego można stwierdzić, że przyjęte parametry są wystarczające do prawidłowej



Tabela 4.6

Opis statystyczny dla węgla typu 35

Table 4.6

Statistical description for coal of type 35

Parametr	Masa [g]	Ciepło spalania [cal]	Zawartość popiołu [%]	Zawartość siarki [%]	Części lotne $V^a$ [%]	Wilgoć analit. $W_a$
Średnia	367,6394	5418,258	31,60273	0,562424	17,65485	1,27303
Odch. stand.	631,5312	2286,931	23,39692	0,244667	2,823312	0,180988
Skośność	3,136177	-0,67203	0,732913	1,0921	-1,1957	-0,00556
Kurtoza	10,91593	-0,28671	-0,18804	1,055829	1,004102	-0,58092
Max	3476,2	8383	82,02	1,26	22,18	1,65
Min	21	600	1,84	0,18	10,6	0,85
Rozstęp	3455,2	7783	80,18	1,08	11,58	0,8



Rys. 4.11. Widok, z którego wynika, że siedmiowymiarowe dane dla węgla typu 35 (punkty jasne) gromadzą się w innej części przestrzeni niż dane dla węgla typu 34.2 (punkty czarne)

Fig. 4.11. View from which it occurs that the seven-dimensional data for coal of type 35 (bright spots) gather in other part of the space than data for coal of type 34.2 (black spots)

identyfikacji czy dana próbka należy do węgla typu 31 czy 35. Na rysunku 4.13 uzyskano widok pozwalający stwierdzić, że dane dotyczące węgla 35 zajmują inny obszar przestrzeni niż węgiel 34.2. Można więc stwierdzić, że przyjęte parametry są wystarczające do prawidłowej identyfikacji czy dana próbka należy do węgla typu 35 czy 34.2. Nie udało się natomiast uzyskać widoku, z którego można by wnioskować, że dane dotyczące węgla 31 zajmują inny obszar przestrzeni niż węgiel 34.2. Nie można więc uznać, że przyjęte parametry są wystarczające do prawidłowej identyfikacji rodzaju węgla.

Jak wcześniej zauważono dane siedmiowymiarowe powstałe z opisanych wyżej siedmiu cech węgla są wystarczające do prawidłowej identyfikacji rodzaju węgla i jednocześnie te same dane po usunięciu parametru „wilgoć analityczna” nie są wystarczające do prawi-



Rys. 4.12. Widok 6-wymiarowych danych powstałych po usunięciu parametru wilgoć analit. Widać, że dane reprezentujące typ węgla 35 (punkty jasne) zajmują inny obszar przestrzeni niż dane reprezentujące typ węgla 31 (punkty czarne)

Fig. 4.12. View of 6-dimensional data created after removal of the parameter „analytical moisture”. It is visible that data representing coal of type 35 (bright spots) are located in other area of space than data representing coal of type 31 (black spots)



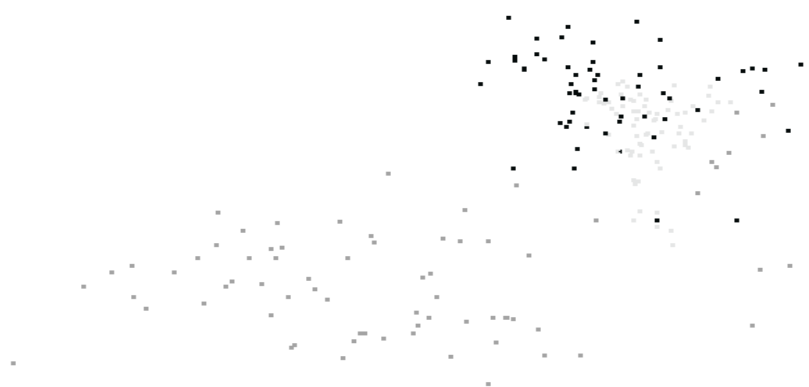
Rys. 4.13. Widok 6-wymiarowych danych powstałych po usunięciu parametru „wilgoć analityczna”. Widać, że dane reprezentujące typ węgla 35 (punkty jasne) zajmują inny obszar przestrzeni niż dane reprezentujące typ węgla 34.2 (punkty czarne)

Fig. 4.13. View of 6-dimensional data created after removal of the parameter „analytical moisture”. It is visible that data representing coal of type 35 (bright spots) are located in other area of space than data representing coal of type 34.2 (black spots)

dłowej identyfikacji rodzaju węgla. Wniosek z tego może być tylko jeden: parametr „wilgoć analityczna” jest niezbędny do prawidłowej identyfikacji rodzaju węgla. Następny zestaw danych skonstruowano więc opierając się na tym parametrze.

Na podstawie wyników macierzy korelacji, z powyżej opisanych siedmiowymiarowych danych usunięto cztery cechy węgla, pozostawiając jedynie trzy parametry: wilgoć analityczną, zawartość siarki oraz części lotne. Każdy z tych parametrów stanowił jeden wymiar. Powstała więc trójwymiarowa przestrzeń. Rysunki 4.14 i 4.15 przedstawiają wyniki eksperymentów. Na rysunku 4.14 uzyskano widok, z którego wynika, że dane dotyczące węgla

31 zajmują inny obszar przestrzeni niż węgiel 35. Na podstawie tego można stwierdzić, że przyjęte parametry są wystarczające do prawidłowej identyfikacji czy dana próbka należy do węgla typu 31 czy 35. Na rysunku 4.15 uzyskano widok pozwalający stwierdzić, że dane dotyczące węgla 34.2 zajmują inny obszar przestrzeni niż węgiel 35 oraz jednocześnie zajmują inny obszar przestrzeni niż węgiel typu 31. Z tych dwóch widoków można więc wnioskować, że przyjęte parametry są wystarczające do prawidłowej identyfikacji czy dana próbka należy do węgla 31, 34.2, czy 35. Jednocześnie nie udało się uzyskać jednego widoku, z którego mógłby wynikać powyższy wniosek. Świadczyć to może o skomplikowanej strukturze analizowanych danych.



Rys. 4.14. Widok 3-wymiarowych danych: wilgoć analityczna, zawartość siarki oraz części lotne. Widać, że dane reprezentujące typ węgla 35 (punkty jasne) zajmują inny obszar przestrzeni niż dane reprezentujące typ węgla 31 (punkty czarne)

Fig. 4.14. View of 3-dimensional data: analytical moisture, sulfur contents and volatile parts contents. It is visible that the data representing coal of type 35 (bright spots) are located in other part of the space than data representing coal of type 31 (black spots)

Następnie postanowiono sprawdzić, jaki wpływ na możliwość identyfikacji rodzaju węgla będzie miało zastąpienie jednego z parametrów opisujących węgiel innym parametrem w wysokim stopniu z nim skorelowanym. Parametr „części lotne” z parametrem „ciepło spalania” ma współczynnik korelacji 0,93 dla typu węgla 31, 0,82 dla typu węgla 34.2 oraz 0,89 dla typu węgla 35 (patrz tabele 4.1–4.3). Są to więc parametry powiązane wysokim współczynnikiem korelacji. Dlatego w zestawie trzech cech (wilgoć analityczna, zawartość siarki oraz części lotne), które jak wcześniej pokazano są wystarczające do prawidłowej identyfikacji rodzaju węgla, zastąpiono parametr „części lotne” parametrem „ciepło spalania”. Rysunki 4.16 i 4.17 przedstawiają otrzymane rezultaty. Na rysunku 4.16 uzyskano widok pozwalający stwierdzić, że dane dotyczące węgla 31 zajmują inny obszar przestrzeni niż węgiel 34.2 oraz jednocześnie zajmują inny obszar przestrzeni niż węgiel typu 35. Na podstawie tego można stwierdzić, że przyjęte parametry są wystarczające do prawidłowej identyfikacji czy dana próbka należy do węgla typu 31. Jednocześnie nie udało



Rys. 4.15. Widok 3-wymiarowych danych powstałych z cech: wilgoć analityczna, zawartość siarki oraz części lotne. Widać, że dane reprezentujące typ węgla 34.2 (punkty czarne) zajmują inny obszar przestrzeni niż dane reprezentujące typ węgla 31 (punkty szare) oraz dane reprezentujące typ węgla 34.2 (punkty czarne) zajmują inny obszar przestrzeni niż dane reprezentujące typ węgla 35 (punkty jasne)

Fig. 4.15. View of 3-dimensional data created from the features: analytical data, sulfur contents and volatile parts contents. It is visible that data representing coal of type 34.2 (black spots) are located in other part of the space than data representing coal of type 31 (gray spots) and data representing coal of type 35 (bright spots)



Rys. 4.16. Widok 3-wymiarowych danych powstałych z cech: wilgoć analityczna, zawartość siarki oraz ciepło spalania. Widać, że dane reprezentujące typ węgla 31 (punkty szare) zajmują inny obszar przestrzeni niż dane reprezentujące typ węgla 34.2 (punkty czarne) oraz inny obszar przestrzeni niż dane reprezentujące typ węgla 35 (punkty jasne)

Fig. 4.16. View of 3-dimensional data created from the features: analytical moisture, sulfur contents and combustion heat. It is visible that the data representing coal of type 34.2 (black spots) are located in other part of the space than data representing coal of type 31 (gray spots) and data representing coal of type 35 (bright spots)



Rys. 4.17. Widok 3-wymiarowych danych powstałych z cech: wilgoć analityczna, zawartość siarki oraz ciepło spalania. Najlepszy uzyskany widok nie pozwala stwierdzić czy dane reprezentujące typ węgla 34.2 (punkty czarne) można oddzielić od danych reprezentujących typ węgla 35 (punkty jasne) – zbiory punktów reprezentujących te dwa typy zachodzą na siebie

Fig. 4.17. View of the 3-dimensional data created from the features: analytical moisture, sulfur contents and combustion heat. The best view does not allow to state if the data representing coal of type 34.2 (black spots) can be divided from the data representing coal of type 35 (bright spots) – sets of spots representing these two types overlap

się uzyskać widoku, pozwalającego stwierdzić, że dane dotyczące węgla 34.5 zajmują inny obszar przestrzeni niż węgiel 35. Najlepszy uzyskany widok dotyczący możliwości rozdzielenia węgla typu 34.5 oraz 35 pokazano na rysunku 4.17. Nie można więc uznać, że przyjęte parametry są wystarczające do prawidłowej identyfikacji rodzaju węgla. Wynika z tego, że w wyniku zamiany parametru „części lotne” na parametr „ciepło spalania”, utracona została informacja pozwalająca w sposób prawidłowy identyfikować rodzaj węgla. Nastąpiło to pomimo wysokiego współczynnika korelacji tych parametrów.

Podobnie postąpiono, zastępując parametr „części lotne” parametrem „zawartość popiołu”. Współczynnik korelacji tych dwóch parametrów jest wysoki i wynosi  $-0,94$  dla węgla typu 31,  $-0,85$  dla węgla typu 34.2 oraz  $-0,93$  dla węgla typu 35 (patrz tabele 4.1–4.3). Powstał więc układ trzech parametrów: wilgoć analityczna, zawartość siarki oraz zawartość popiołu. Na rysunku 4.18 uzyskano widok pozwalający stwierdzić, że dane dotyczące węgla 31 zajmują inny obszar przestrzeni niż węgiel 34.2 oraz jednocześnie zajmują inny obszar przestrzeni niż węgiel typu 35. Na podstawie tego – podobnie jak w poprzednio wybranym zestawie cech – można stwierdzić, że przyjęte parametry są wystarczające do prawidłowej identyfikacji czy dana próbka należy do węgla typu 31. Jednocześnie nie udało się uzyskać widoku, pozwalającego stwierdzić, że dane dotyczące węgla 34.2 zajmują inny obszar przestrzeni niż węgiel 35. Przyjęte parametry nie są więc wystarczające do prawidłowej identyfikacji rodzaju węgla. Więc w wyniku zamiany parametru „części lotne” na parametr „zawartość popiołu”, podobnie jak poprzednio utracona została informacja pozwalająca



Rys. 4.18. Widok 3-wymiarowych danych powstałych z cech: wilgoć analityczna, zawartość siarki oraz zawartość popiołu. Widać, że dane reprezentujące typ węgla 31 (punkty szare) zajmują inny obszar przestrzeni niż dane reprezentujące typ węgla 34.2 (punkty czarne) oraz inny obszar przestrzeni niż dane reprezentujące typ węgla 35 (punkty jasne)

Fig. 4.18. View of 3-dimensional data created from the features: analytical moisture, sulfur contents and ash contents. It is visible that data representing coal of type 31 (gray spots) are located in other area of the space than the coal of type 34.2 (black spots) and data representing coal of type 35 (bright spots)

w sposób prawidłowy identyfikować trzy rodzaje węgla pomimo wysokiego współczynnika korelacji tych parametrów.

Przeprowadzone wizualizacje wielowymiarowych danych pozwoliły sformułować następujące wnioski:

- przyjęte siedmiowymiarowe dane oparte na przyjętych siedmiu cechach są wystarczające do prawidłowej identyfikacji typu węgla;
- dane sześciowymiarowe powstałe w wyniku usunięcia parametru „wilgoć analityczna” nie są wystarczające do prawidłowej identyfikacji rodzaju węgla. Pozwalają jedynie odróżnić od siebie typy węgla 35 od 31 oraz 35 od 34.2;
- parametr „wilgoć analityczna” jest niezbędny do prawidłowej identyfikacji rodzaju węgla;
- dane trzywymiarowe powstałe z parametrów: wilgoć analityczna, zawartość siarki oraz części lotne są wystarczające do prawidłowej identyfikacji typu węgla;
- zastąpienie w zestawie cech węgla jednego z parametrów opisujących węgiel innym parametrem w wysokim stopniu z nim skorelowanym nie gwarantuje zachowania informacji koniecznych do identyfikacji rodzaju węgla.

Jak łatwo zauważyć, metody wizualizacji danych wielowymiarowych dotyczących materiałów uziarnionych nie do końca są wkomponowane w szeroko rozumiane metody statystycznej wielowymiarowej analizy danych. Warto jednak zwrócić uwagę, że stwarzają one możliwości klasyfikacji materiałów uziarnionych (określanie „gatunku”, miejsca pochodzenia) i dlatego mogą być interesujące dla potrzeb przeróbki surowców mineralnych. Z tego powodu prace w tym zakresie będą kontynuowane.

## Podsumowanie

Zgodnie z planem prezentowanej monografii jej celem było wprowadzenie i zastosowanie wielowymiarowych charakterystyk zmiennych losowych (wektorów losowych) do opisu właściwości materiałów uziarnionych i procesów ich rozdziału. Opis takich materiałów wymaga dostosowania się do ich natury oraz możliwości ich charakteryzowania (pomiaru wartości cech), co rodzi określone kłopoty interpretacyjne i obliczeniowe, ponieważ występujące w wektorze losowym zmienne dzielą się praktycznie na dwie kategorie: zmienne mierzalne bezpośrednio (poprzez sortowanie ziaren do określonych zbiorów (frakcji) (przesiewanie, rozdział w cieczach ciężkich, separacja magnetyczna itp.) oraz zmienne, które charakteryzowane są pośrednio przez ich rozkłady warunkowe lub wartości średnie w otrzymywanych zbiorach (szeroko rozumianych klaso-frakcjach), czyli zawartości składników i właściwości określane odpowiednimi metodami analitycznymi.

Taki podział zmiennych powoduje dobór metod opisu dostosowanych do nich, tzn. bezpośrednio charakterystyk rozkładów wielowymiarowych lub pośrednich metod charakterystyk regresyjnych.

W pracy zostały wykorzystane obie ścieżki opisu. Patrząc z punktu widzenia formalizacji wielowymiarowego opisu materiałów uziarnionych, przyjęto m.in. metodykę rozkładów Morgensterna, dla których potrzebne rozkłady brzegowe wyznaczono różnymi technikami:

- rozkładami cenzurowanymi poszczególnych zmiennych losowych;
- wykorzystując funkcje odwrotne do dystrybuant (przy aproksymacji np. krzywych wzbogacalności);
- niekonwencjonalnymi metodami statystycznymi (m. in. nieparametryczne metody statystyczne, rozkłady warunkowe oparte na metodach bayesowskich, czy nowatorskie zastosowanie metody krigingu zwyczajnego).

W realizacji celów pracy posłużono się różnorodnymi technikami obliczeniowymi, wliczając w to zarówno jedno-, jak i wielowymiarowe klasyczne i nieklasyczne rozkłady zmiennych losowych, rozkłady warunkowe, techniki interpolacyjne z zastosowaniem metody krigingu, czy metody wielowymiarowej wizualizacji danych.

W monografii przedstawiono praktyczne zastosowanie modeli teoretycznych. Dokonano udanej dwuwymiarowej aproksymacji krzywych wzbogacalności Henry'ego na przykładzie węgla. W tym celu zastosowano różne techniki aproksymacyjne, oparte na rozkładzie logistycznym oraz rozkładzie GSA. Aby aproksymacja była dokładniejsza zaimplemen-

towano też tu metodę krigingu zwyczajnego. Pozwoliło to na wyprowadzenie wniosków, że metodyka może być z powodzeniem stosowana do aproksymacji podstawowych krzywych wzbogacalności Henry'ego, co potwierdza fakt, że średnia zawartość popiołu obliczona na podstawie wyników doświadczalnych nie różni się w znaczący sposób od wartości wyliczonej na podstawie teoretycznej krzywej Henry'ego. Ponadto niewielki średniokwadratowy błąd przybliżenia średnich zawartości popiołu w poszczególnych frakcjach, uzasadnia prawidłowość stosowanej metody aproksymacyjnej. Można przyjąć, że uzyskana krzywa teoretyczna jest dobrą aproksymacją krzywej wzbogacalności Henry'ego. Ponadto przedstawienie w postaci analitycznej krzywej Henry'ego pozwala oszacować zawartość badanego składnika (w dowolnej frakcji badanego materiału, tzn. w dowolnym zakresie gęstości).

Aby poprawić jakość aproksymacji zaproponowano również zastosowanie nieparametrycznych metod statystycznych, m. in. w celu aproksymacji rozkładu zawartości popiołu w węglu, będącym mieszaniną materiału pobranego z różnych pokładów. Dokonano porównania klasycznej aproksymacji za pomocą rozkładu logarytmiczno-normalnego z aproksymantami otrzymanymi poprzez zastosowanie funkcji jądrowych z jądrem Epanechnikowa oraz jądrem Gaussa, jak również metodą Fouriera. Okazało się, że metody nieparametryczne dały lepsze efekty dopasowania od najlepszego rozkładu otrzymanego metodą klasyczną. Na podstawie przeprowadzonych badań można więc stwierdzić, że rozkład zawartości popiołu w nadawie węgla należy rozpatrywać jako mieszaninę rozkładów tej cechy w poszczególnych pokładach. Ponadto zastosowanie nieparametrycznych metod estymacji pozwala bardziej precyzyjnie określić funkcję gęstości niż w przypadku założenia, że rozkład badanej cechy należy do rodziny rozkładów zadanych z góry (np. rozkład logarytmiczno-normalny). Warto również zauważyć, że w poszczególnych pokładach nie zawsze ta sama metoda daje optymalny, możliwy efekt, dlatego celowe jest zastosowanie funkcji gęstości mieszaniny optymalnych estymatorów dla poszczególnych frakcji. Analizując stosowalność nieparametrycznych metod statystycznych można też stwierdzić, że metody nieparametrycznej estymacji pozwalają dokładniej określić prawdopodobieństwo ryzyka ekonomicznego, związanego z założeniem określonej jakości węgla.

W dalszej części opracowania dokonano aproksymacji krzywych składu ziarnowego za pomocą rozkładu Weibulla, ale z bayesowskimi estymatorami parametrów tego rozkładu. Do tego celu, jako materiał analityczny wybrano materiał skalny – porfir, który poddano procesowi wielostadialnego kruszenia. Następnie, stosując twierdzenie Bayesa, wyprowadzono estymatory parametrów opisowych rozkładu Weibulla ( $d_0$  i  $c$ ) dla składu ziarnowego w poszczególnych stadiach rozdrabniania i podstawiono je do wzoru na rozkład Weibulla dla tych stadiów, gdzie tradycyjna aproksymacja nie dała zadowalającego poziomu dopasowania (wysoka wartość błędu średniokwadratowego  $s_r$ ). Do sprawdzenia jakości aproksymacji wybrano więc te poziomy kruszenia, dla których krzywa Weibulla, wyznaczona za pomocą linearyzacji nie była najlepiej dopasowana. Za każdym razem estymatory bayesowskie dawały lepsze dopasowanie. Zasadnym jest więc stosowanie tej metody estymacji parametrów rozkładów przy określaniu teoretycznych krzywych składu ziarnowego, jak i rozkładów innych wielkości charakteryzujących materiał uziarniony.



Zaprezentowano również wielowymiarową analizę materiału uziarnionego na przykładzie węgla, podzielonego na klaso-fracje. Zaproponowano kilka metod aproksymacji – tradycyjną, opartą na iloczynie dystrybuant składu ziarnowego i gęstościowego analizowanego materiału oraz metodę opartą na tzw. rozkładach Morgensterna. Okazało się, że metoda Morgensterna daje zdecydowanie lepsze efekty i jakość dopasowania niż tradycyjny iloczyn zmiennych losowych. Na podstawie tych analiz można ponadto stwierdzić, że jedynie wielowymiarowa analiza statystyczna może dać wystarczająco pełną informację na temat związków i wpływów poszczególnych cech materiału uziarnionego. Oprócz klasycznych metod statystycznych możliwe jest zastosowanie wielu innych technik, a obok takich cech jak wielkość i gęstość ziarna można brać pod uwagę także inne cechy materiału uziarnionego, jak np. zawartość popiołu, czy zawartość siarki, które również znacząco wpływają na jakość analizowanego materiału.

Oprócz klasycznych aproksymant w analizie wielowymiarowej zastosowano także metody nieparametryczne, tj. metody jądrowe oraz metodę Fouriera, które należy stosować w przypadku, gdy tradycyjne aproksymacje na dają zadowalających efektów. Metody te ponadto wykorzystano także przy oszacowywaniu rozkładów warunkowych. Podjęto próbę aproksymacji rozkładu warunkowego  $F(d|\rho)$ . Na podstawie wyników doświadczalnych, dotyczących węgla, skonstruowano warunkową empiryczną dystrybuantę  $F(d|\rho)$  dla zmiennej  $D$  (wielkość ziarna), dla każdej klasy ziarnowej przy ustalonej wartości gęstości. Następnie, za pomocą dystrybuanty rozkładu Weibulla, dokonano aproksymacji składu ziarnowego. Dla poszczególnych frakcji gęstościowych otrzymano ten sam typ rozkładu, ale jego parametry były różne. Przyjęto więc, że oba parametry opisowe rozkładu Weibulla są zmiennymi losowymi, które zaproksymowano za pomocą metod nieparametrycznych. Wyniki aproksymacji były bardzo dobre. Dokonano również analizy regresyjnej dla obu parametrów oraz gęstości ziaren, stosując zarówno metodę tradycyjną, jak i opartą na rozwinięciu w szereg Fouriera. Zastosowana metodyka pozwoliła na stwierdzenie, że zastosowanie metody Fouriera do estymacji funkcji regresji dało możliwość uzyskania postaci analitycznej rozkładu warunkowego zmiennej losowej opisującej wielkość ziarna przy założonej wartości jego gęstości. Znając rozkład gęstości ziarna, która najczęściej aproksymowana jest za pomocą rozkładów Weibulla lub rozkładu logistycznego możliwe jest utworzenie dwuwymiarowego rozkładu opisującego rozmiar i gęstość ziarna.

Oprócz klasycznych aproksymacji dokonano praktycznego zastosowania metody krigingu zwyczajnego w celu interpolacji wartości wybranych charakterystyk materiału uziarnionego na przykładzie węgla. Metoda ta daje możliwość uzyskania bardzo dokładnej informacji na temat badanego materiału w momencie, gdy badacz nie dysponuje pełnymi wynikami analiz lub są one niezbyt dokładne (np. zbyt szerokie klasy ziarnowe lub frakcje gęstościowe). W monografii przedstawiono zastosowanie różnego rodzaju wariogramów, które są bazą do stosowania metody krigingu. Wykorzystano zarówno konkretne typy takich funkcji, jak również tzw. wariogramy łączone, będące kompilacją dwóch lub więcej typów wariogramów składowych. Taka metodyka umożliwi bardziej dokładny opis, a tym samym zmniejsza wartość błędu analizy. Stosując metodę krigingu interpolowano wartości doty-

czące zawartości popiołu, siarki oraz części lotnych w węglu w zależności od wielkości i gęstości ziarna. Tym samym dowiedziono, że zastosowanie metod krigingu do zagadnień związanych z przeróbką surowców mineralnych pozwala na lepszą aproksymację zależności między właściwościami badanego materiału. Pozwala również na utworzenie większej liczby danych pomiarowych, które mogą pozwolić na podział badanego materiału na węższe frakcje, a więc na bardziej precyzyjne modelowanie różnego rodzaju krzywych i powierzchni stosowanych w przeróbce surowców mineralnych. Tak więc technika ta, stosowana głównie w geostatystyce, może również zostać wykorzystana w badaniach materiałów uziarnionych. Potencjalne wykorzystanie tej techniki w przeróbce surowców mineralnych – a zwłaszcza węgla – jest bardzo duże.

Zaprezentowano również metody wielowymiarowej wizualizacji danych. Metody te, mające swoją genezę zarówno w statystyce, jak i informatyce pozwalają na interpretację graficzną danych o ilości wymiarów większej niż trzy. W pracy przedstawiono i omówiono głównie metodę tuneli informacyjnych, którą zastosowano do wizualizacji danych dotyczących węgla. Zastosowana metodyka umożliwia identyfikację zarówno typu węgla (węgiel energetyczny, semi-koksujący lub węgiel koksujący), jak również pozwala na identyfikację klasy ziarnowej lub frakcji gęstościowej z jakiej pobrany został analizowany materiał. Widoki, będące swoistymi siedmiowymiarowymi projekcjami dają możliwość wyciągnięcia informacji z dużej ilości danych, a tym samym dokonania swoistego *data-miningu*. Technika ta jest bardzo nowatorska i nie stosowana dotychczas w przeróbce surowców mineralnych.

Prace nad stosowaniem omówionych metod, jak również innych technik będą kontynuowane przez autora monografii.

## **Załącznik**

Węgla typu 31, 34.2 i 35 zostały pobrane z trzech kopalni zlokalizowanych w Górnośląskim Okręgu Przemysłowym. Każdy z nich został rozdzielony na sitach na klasy ziarnowe: -1,00, -3,15, -6,30, -8,00, -10,00, -12,50, -14,00, -16,00 i -20,00 mm. Następnie, każda klasa ziarnowa została dodatkowo poddana rozdziałowi na frakcje densymetryczne przy zastosowaniu roztworów wodnych chlorku cynku o różnych gęstościach (1,3, 1,4, 1,5, 1,6, 1,7, 1,8 i 1,9 g/cm<sup>3</sup>). Takie klaso-frakcje były następnie przedmiotem dalszych badań (analiza chemiczna).

## ZA.1. Dane dla węgla typu 31

20–16 [mm]						
Gęstość [g/cm <sup>3</sup> ]	Masa	Ciepło spalania [cal]	Zawartość popiołu [%]	Zawartość siarki [%]	Części lotne <i>V<sup>a</sup></i>	Wilgoć analit. <i>W<sub>a</sub></i>
<1,3	303,5	6 280	14,75	0,82	29,49	4,03
1,3–1,4	97,9	6 225	15,32	0,8	30,01	3,74
1,4–1,5	153,1	6 111	16,53	0,8	30,17	3,36
1,5–1,6	66,5	6 941	6,67	0,85	33,13	4,20
1,6–1,7	19,4	4 741	27,30	0,51	20,18	3,32
1,7–1,8	24,4	4 198	36,35	1,36	27,99	2,45
1,8–1,9	65,1	3 068	51,96	2,16	21,97	2,01
>1,9	803,1	533	84,33	0,45	11,48	1,03

16–14 [mm]						
Gęstość [g/cm <sup>3</sup> ]	Masa	Ciepło spalania [cal]	Zawartość popiołu [%]	Zawartość siarki [%]	Części lotne <i>V<sup>a</sup></i>	Wilgoć analit. <i>W<sub>a</sub></i>
<1,3	411,7	7 141	5,45	0,62	32,50	3,59
1,3–1,4	118,1	5 774	21,67	0,68	28,37	2,94
1,4–1,5	209,3	6 168	16,6	1,03	29,38	3,23
1,5–1,6	98	4 908	29,40	1,06	28,08	3,30
1,6–1,7	22,7	4 558	29,48	1,77	31,82	2,89
1,7–1,8	7,1	3 790	42,50	0,39	25,91	2,65
1,8–1,9	8,6	2 977	49,25	0,56	19,19	2,66
>1,9	805,1	615	83,53	1,69	11,02	1,06

14–12,5 [mm]						
Gęstość [g/cm <sup>3</sup> ]	Masa	Ciepło spalania [cal]	Zawartość popiołu [%]	Zawartość siarki [%]	Części lotne <i>V<sup>a</sup></i>	Wilgoć analit. <i>W<sub>a</sub></i>
<1,3	308,6	7 048	6,41	0,72	34,32	3,23
1,3–1,4	292,5	5 859	19,61	0,7	29,22	3,36
1,4–1,5	36,1	2 948	16,55	0,76	28,92	3,87
1,5–1,6	10,7	5 117	26,10	1,55	31,08	3,40
1,6–1,7	25,6	4 467	35,78	2,28	26,71	2,40
1,7–1,8	139	3 920	37,20	1,23	29,24	2,19
1,8–1,9	12,7	3 078	48,20	1,13	24,05	2,23
>1,9	601,2	457	86,53	0,40	9,30	0,91

12,5–10 [mm]						
Gęstość [g/cm <sup>3</sup> ]	Masa	Ciepło spalania [cal]	Zawartość popiołu [%]	Zawartość siarki [%]	Części lotne <i>V<sup>a</sup></i>	Wilgoć analit. <i>W<sub>a</sub></i>
<1,3	757,7	7 518	2,04	0,60	35,01	4,06
1,3–1,4	467,7	7 098	4,36	0,84	32,58	3,38
1,4–1,5	159,9	4 782	33,48	1,38	24,88	2,68
1,5–1,6	65,9	4 548	36,95	1,12	19,33	2,31
1,6–1,7	31,3	3 954	44,3	0,96	16,38	1,95
1,7–1,8	43,6	2 858	53,2	0,94	12,87	1,41
1,8–1,9	40,6	1 354	65,9	0,75	11,35	1,32
>1,9	1 150	433	86,59	0,60	9,57	1,03

10–8 [mm]						
Gęstość [g/cm <sup>3</sup> ]	Masa	Ciepło spalania [cal]	Zawartość popiołu [%]	Zawartość siarki [%]	Części lotne <i>V<sup>a</sup></i>	Wilgoć analit. <i>W<sub>a</sub></i>
<1,3	444,1	7 069	6,42	0,65	32,51	3,75
1,3–1,4	452,6	6 187	16,21	0,86	28,84	3,62
1,4–1,5	83,5	5 804	21,58	1,17	28,01	3,24
1,5–1,6	53,7	5 365	25,8	0,99	28,69	2,95
1,6–1,7	30,8	4 434	32,14	0,98	29,84	2,65
1,7–1,8	18,1	2 821	40,36	0,98	26,65	1,71
1,8–1,9	38	3 053	48,10	0,98	23,30	2,49
>1,9	928,3	1 055	78,46	0,7	11,49	1,19

8–6,3 [mm]						
Gęstość [g/cm <sup>3</sup> ]	Masa	Ciepło spalania [cal]	Zawartość popiołu [%]	Zawartość siarki [%]	Części lotne <i>V<sup>a</sup></i>	Wilgoć analit. <i>W<sub>a</sub></i>
<1,3	933	6 857	10,70	0,56	30,05	3,27
1,3–1,4	531,6	6 626	12,09	0,67	29,14	3,44
1,4–1,5	79,9	6 106	16,20	1,11	28,60	3,64
1,5–1,6	28,9	5 272	25,05	1,64	27,79	2,96
1,6–1,7	26,4	4 380	34,50	1,50	26,35	2,76
1,7–1,8	28,7	3 732	46,60	1,49	24,75	2,80
1,8–1,9	44	3 135	50,86	2,14	24,15	2,11
>1,9	760,8	1 672	72,24	0,76	12,57	1,25

6,3–3,15 [mm]						
Gęstość [g/cm <sup>3</sup> ]	Masa	Ciepło spalania [cal]	Zawartość popiołu [%]	Zawartość siarki [%]	Części lotne <i>V<sup>a</sup></i>	Wilgoć analit. <i>W<sub>a</sub></i>
<1,3	3 575,6	7 431	1,28	0,65	37,04	3,18
1,3–1,4	2 611,4	7 031	4,23	0,67	32,74	3,94
1,4–1,5	341,6	6 144	14,84	1,36	27,91	3,60
1,5–1,6	128,2	5 568	23,1	1,44	26,32	3,21
1,6–1,7	108	4 317	37,01	1,64	24,51	2,55
1,7–1,8	104	3 874	41,57	1,75	25,17	2,31
1,8–2,0	88,2	3 658	42,63	1,81	24,89	2,19
>1,9	2 496,8	3 445	43,33	1,95	24,33	2,08

3,15–1 [mm]						
Gęstość [g/cm <sup>3</sup> ]	Masa	Ciepło spalania [cal]	Zawartość popiołu [%]	Zawartość siarki [%]	Części lotne <i>V<sup>a</sup></i>	Wilgoć analit. <i>W<sub>a</sub></i>
<1,3	4 187,8	7 367	1,25	0,63	36,02	4,15
1,3–1,4	2 864	7 021	3,35	0,66	32,14	4,33
1,4–1,5	310	5 939	18,78	1,33	27,54	2,55
1,5–1,6	102,3	5 547	23,83	1,66	26,87	2,80
1,6–1,7	111,9	4 911	30,54	1,91	25,98	2,65
1,7–1,8	91,3	4 177	39,94	1,93	25,17	2,35
1,8–1,9	80,9	3 462	47,43	1,74	24,00	2,29
>1,9	1 051,8	762	82,20	1,72	13,05	1,14

1–0,5 [mm]						
Gęstość [g/cm <sup>3</sup> ]	Masa	Ciepło spalania [cal]	Zawartość popiołu [%]	Zawartość siarki [%]	Części lotne <i>V<sup>a</sup></i>	Wilgoć analit. <i>W<sub>a</sub></i>
<1,3	1 583,9	7 320	1,41	0,62	35,88	4,39
1,3–1,4	1 325,7	7 139	3,10	0,64	31,19	5,41
1,4–1,5	116,4	6 325	12,85	0,99	27,63	3,54
1,5–1,6	30,1	5 525	22,69	1,43	25,99	3,20
1,6–1,7	12,1	5 208	26,34	1,5	25,52	3,45
1,7–1,8	101,8	4 964	30,24	1,51	24,74	2,89
1,8–1,9	30,8	3 412	47,20	1,57	21,12	2,51
>1,9	845,5	654	82,20	2,25	16,07	1,13

## ZA.2. Dane dla węgla typu 34.2

20–16 [mm]						
Gęstość [g/cm <sup>3</sup> ]	Masa	Ciepło spalania [cal]	Zawartość popiołu [%]	Zawartość siarki [%]	Części lotne V <sup>a</sup>	Wilgoć analit. W <sub>a</sub>
<1,3	236,3	8 329	2	0,32	29,16	1,2
1,3–1,4	46	7 898	6,05	1,01	25,47	1,35
1,4–1,5	12,6	6 582	15,9	0,3	26,01	1,11
1,5–1,6	2,7	4 985	33,04	0,49	mało	1,24
1,6–1,7	2,5	4 804	25,2	0,07	mało	mało
1,7–1,8	bd			0,2		
1,8–1,9	76,7	791	79,18	0,16	11,89	1,06
>1,9	bd			0,27		

16–14 [mm]						
Gęstość [g/cm <sup>3</sup> ]	Masa	Ciepło spalania [cal]	Zawartość popiołu [%]	Zawartość siarki [%]	Części lotne V <sup>a</sup>	Wilgoć analit. W <sub>a</sub>
<1,3	276,6	8 248	1,54	0,31	28,71	1,23
1,3–1,4	131	8 080	3,63	0,33	27,97	0,73
1,4–1,5	20	7 048	13,12	1,57	23,56	1,02
1,5–1,6	2,5	5 653	21,35	1,46	mało	mało
1,6–1,7	11,4	5 093	23	0,6	27,92	0,81
1,7–1,8	8,1	3 943	41,85	0,43	22,15	0,72
1,8–1,9	bd			0,32		
>1,9	98,4	6 170	66,2	0,25	9,77	0,58

14–12,5 [mm]						
Gęstość [g/cm <sup>3</sup> ]	Masa	Ciepło spalania [cal]	Zawartość popiołu [%]	Zawartość siarki [%]	Części lotne V <sup>a</sup>	Wilgoć analit. W <sub>a</sub>
<1,3	360,5	8 227	2	0,32	28,96	1,04
1,3–1,4	57	7 647	7,67	0,71	24,16	1,87
1,4–1,5	25,5	6 901	15,33	0,83	24,58	1,34
1,5–1,6	12,2	5 798	33,73	0,17	27,85	0,95
1,6–1,7	3,2	4 830	34,3	0,34	mało	mało
1,7–1,8	15	4 152	36,15	0,34	27,93	0,37
1,8–1,9	3,6	4 415	27	0,05	31,75	1,01
>1,9	68,9	693	79,33	0,91	12,08	0,52

12,5–10 [mm]						
Gęstość [g/cm <sup>3</sup> ]	Masa	Ciepło spalania [cal]	Zawartość popiołu [%]	Zawartość siarki [%]	Części lotne V <sup>a</sup>	Wilgoć analit. W <sub>a</sub>
<1,3	620,9	8 367	1,4	0,31	29,94	1,02
1,3–1,4	102	7 889	5,5	0,45	25,78	0,93
1,4–1,5	24,4	6 766	14,7	0,52	25,71	1,11
1,5–1,6	21,2	5 960	24,1	0,51	26,07	1,11
1,6–1,7	11,6	4 742	33,9	0,35	25,36	1,11
1,7–1,8	4,3	4 359	36	0,28	31,64	1,26
1,8–1,9	bd			0,21		
>1,9	133	725	80,2	0,16	11,02	0,85

10–8 [mm]						
Gęstość [g/cm <sup>3</sup> ]	Masa	Ciepło spalania [cal]	Zawartość popiołu [%]	Zawartość siarki [%]	Części lotne V <sup>a</sup>	Wilgoć analit. W <sub>a</sub>
<1,3	655,6	8 338	1,48	0,32	30,06	1,48
1,3–1,4	169,2	7 998	5,69	0,47	25,74	1,18
1,4–1,5	49,9	7 035	24,65	0,67	26,01	1,30
1,5–1,6	18,5	5 994	22,93	0,70	26,08	1,22
1,6–1,7	18,9	5 117	28,82	0,84	26,89	1,06
1,7–1,8	14,9	4 418	35,31	0,58	26,49	0,93
1,8–2,0	2,2	3 646	47,53	0,25	mało	mało
>2,0	136,1	627	81,97	0,16	11,23	0,91

8–6,3 [mm]						
Gęstość [g/cm <sup>3</sup> ]	Masa	Ciepło spalania [cal]	Zawartość popiołu [%]	Zawartość siarki [%]	Części lotne V <sup>a</sup>	Wilgoć analit. W <sub>a</sub>
<1,3	601,5	8 323	1,42	0,31	30,58	1,15
1,3–1,4	174,6	7 958	4,73	0,45	26,37	1,1
1,4–1,5	37,2	6 808	15,03	0,53	26,32	1,09
1,5–1,6	21	5 838	21,63	0,7	27,21	1,1
1,6–1,7	12,9	5 008	31,06	0,9	25,96	1,01
1,7–1,8	12,8	4 398	37,59	0,82	24,95	0,95
1,8–1,9	0,8	mało	mało	0,71	mało	mało
>1,9	110	591	81,34	0,19	10,5	0,8



6,3–3,15 [mm]						
Gęstość [g/cm <sup>3</sup> ]	Masa	Ciepło spalania [cal]	Zawartość popiołu [%]	Zawartość siarki [%]	Części lotne V <sup>a</sup>	Wilgoć analit. W <sub>a</sub>
<1,3	1817,9	8 355	1,13	0,31	31,03	1,11
1,3–1,4	503,6	7 975	4,92	0,42	26,41	0,93
1,4–1,5	69,5	6 775	16,21	0,69	25,52	0,83
1,5–1,6	46,7	5 887	24,53	0,79	25,01	0,92
1,6–1,7	30,6	5 001	31,01	0,67	26	0,92
1,7–1,8	21,4	4 402	25,34	0,68	25,34	1,31
1,8–1,9	3,6	4 428	36,86	1,11	26,41	0,92
>1,9	248,2	731	79,9	0,43	12,19	0,75

3,15–1 [mm]						
Gęstość [g/cm <sup>3</sup> ]	Masa	Ciepło spalania [cal]	Zawartość popiołu [%]	Zawartość siarki [%]	Części lotne V <sup>a</sup>	Wilgoć analit. W <sub>a</sub>
<1,3	1 803	8 345	1,1	0,31	31,87	0,85
1,3–1,4	794	8 032	3,7	0,38	26,52	0,88
1,4–1,5	83,3	6 972	14,7	0,6	25,66	0,64
1,5–1,6	40,6	5 971	24,2	0,84	24,3	0,8
1,6–1,7	25	5 093	31,6	0,42	25,48	0,42
1,7–1,8	20,8	4 571	37	0,86	22,08	0,56
1,8–1,9	6,7	4 228	40,2	0,96	24,77	0,63
>1,9	213,7	887	79,3	0,89	13,75	0,55

1–0,5 [mm]						
Gęstość [g/cm <sup>3</sup> ]	Masa	Ciepło spalania [cal]	Zawartość popiołu [%]	Zawartość siarki [%]	Części lotne V <sup>a</sup>	Wilgoć analit. W <sub>a</sub>
<1,3	541	8 363	0,79	0,31	31,26	0,64
1,3–1,4	426	8 363	0,79	0,31	31,26	0,64
1,4–1,5	26,5	7 092	13,72	0,57	23,64	0,82
1,5–1,6	12,8	6 177	23,25	0,73	24,16	0,62
1,6–1,7	7,9	5 243	30,74	0,85	25,15	0,52
1,7–1,8	6,7	4 500	38	1	23,95	0,81
1,8–1,9	1,5	4 145	40,67	1,28	mało	mało
>1,9	77,3	1 025	75,59	1,81	22,65	0,52

bd – brak danych (brak próby), przed rozdzieleniem w cieczach ciężkich kwartowano.

Mało – za mało materiału do wykonania próby

## ZA.3. Dane dla węgla typu 35

20–16 [mm]						
Gęstość [g/cm <sup>3</sup> ]	Masa	Ciepło spalania [cal]	Zawartość popiołu [%]	Zawartość siarki [%]	Części lotne V <sup>a</sup>	Wilgoć analit. W <sub>a</sub>
<1,3	463,4	8 356	2,27	0,30	20,75	1,43
1,3–1,4	164,5	7 690	9,90	0,33	20,00	1,15
1,4–1,5	109,2	6 620	18,15	0,52	20,66	1,25
1,5–1,6	48,7	5 852	26,50	1,17	17,30	1,44
1,6–1,7	78,1	5 056	35,70	0,58	19,65	1,43
1,7–1,8	79,9	3 678	46,17	1,36	15,37	1,54
1,8–1,9	44,8	3 011	56,90	1,15	13,55	1,65
>1,9	1 110,4	650	82,62	0,11	10,52	1,23

16–14 [mm]						
Gęstość [g/cm <sup>3</sup> ]	Masa	Ciepło spalania [cal]	Zawartość popiołu [%]	Zawartość siarki [%]	Części lotne V <sup>a</sup>	Wilgoć analit. W <sub>a</sub>
<1,3	277,4	8 212	2,62	0,29	20,18	1,34
01,3–1,4	122,7	7 615	9,15	0,41	19,23	1,20
1,4–1,5	56,3	6 487	20,13	0,62	17,97	1,26
1,5–1,6	21,0	5 989	25,02	0,46	18,87	1,25
1,6–1,7	54,8	4 936	36,36	0,81	16,14	1,39
1,7–1,8	39,8	4 159	43,43	0,72	19,35	1,42
1,8–1,9	53,6	3 912	52,40	0,64	16,65	1,53
>1,9	648,3	600	82,02	0,18	10,79	1,24

14–12,5 [mm]						
Gęstość [g/cm <sup>3</sup> ]	Masa	Ciepło spalania [cal]	Zawartość popiołu [%]	Zawartość siarki [%]	Części lotne V <sup>a</sup>	Wilgoć analit. W <sub>a</sub>
<1,3	268,7	8 327	2,38	0,28	20,28	1,45
1,3–1,4	89,3	7 610	8,97	0,36	20,10	1,21
1,4–1,5	39,8	6 567	19,61	0,56	18,83	1,28
1,5–1,6	22,0	5 031	35,68	0,39	16,22	1,32
1,6–1,7	25,7	4 988	34,62	1,26	19,42	1,47
1,7–1,8	29,0	4 589	40,60	0,38	18,86	1,61
1,8–1,9	28,1	3 286	52,24	1,14	17,95	1,51
>1,9	589,5	702	80,57	0,20	10,84	1,37

12,5–10 [mm]						
Gęstość [g/cm <sup>3</sup> ]	Masa	Ciepło spalania [cal]	Zawartość popiołu [%]	Zawartość siarki [%]	Części lotne V <sup>a</sup>	Wilgoć analit. W <sub>a</sub>
<1,3	557,9	8 164	4,2	0,39	20,39	1,30
1,3–1,4	225,9	7 658	9,25	0,39	19,35	1,21
1,4–1,5	85,1	6 529	20,57	0,38	18,81	1,32
1,5–1,6	39,8	5 626	28,56	0,37	18,95	1,39
1,6–1,7	67,4	4 852	36,44	0,74	17,42	1,31
1,7–1,8	52,5	3 958	45,46	0,65	17,25	1,47
1,8–1,9	43,4	3 985	52,22	0,77	15,67	1,64
>1,9	796,6	863	78,79	0,29	10,62	1,27

10–8 [mm]						
Gęstość [g/cm <sup>3</sup> ]	Masa	Ciepło spalania [cal]	Zawartość popiołu [%]	Zawartość siarki [%]	Części lotne V <sup>a</sup>	Wilgoć analit. W <sub>a</sub>
<1,3	847,3	8 294	2,32	0,31	20,19	1,36
1,3–1,4	196,4	7 608	9,18	0,40	19,54	1,11
1,4–1,5	100,2	6 576	18,73	0,56	19,46	1,20
1,5–1,6	187,8	5 838	27,12	0,57	17,45	1,38
1,6–1,7	62,9	4 998	35,35	0,63	17,07	1,40
1,7–1,8	51,8	3 997	45,14	0,88	17,13	1,51
1,8–1,9	45,9	4 092	51,41	1,20	15,86	1,57
>1,9	882,5	797	79,78	0,31	13,64	1,47

8–6,3 [mm]						
Gęstość [g/cm <sup>3</sup> ]	Masa	Ciepło spalania [cal]	Zawartość popiołu [%]	Zawartość siarki [%]	Części lotne V <sup>a</sup>	Wilgoć analit. W <sub>a</sub>
<1,3	389,9	8 146	3,88	0,39	20,53	1,32
1,3–1,4	131,2	7 813	7,98	0,51	19,69	1,10
1,4–1,5	68,3	6 682	19,72	0,56	18,70	1,10
1,5–1,6	43,6	5 595	29,19	0,68	18,20	1,14
1,6–1,7	30,4	4 526	38,91	0,82	18,24	1,09
1,7–1,8	27,1	3 980	44,58	0,81	17,21	1,32
1,8–1,9	25,9	3 425	49,87	0,56	16,10	1,47
>1,9	528,1	903	78,62	0,33	10,60	1,35

6,3–3,15 [mm]						
Gęstość [g/cm <sup>3</sup> ]	Masa	Ciepło spalania [cal]	Zawartość popiołu [%]	Zawartość siarki [%]	Części lotne <i>V<sup>a</sup></i>	Wilgoć analit. <i>W<sub>a</sub></i>
<1,3	2 081,1	8 316	2,49	0,40	21,25	1,30
1,3–1,4	745,2	7 772	8,30	0,5	19,28	1,19
1,4–1,5	294,4	6 647	18,98	0,59	18,62	1,14
1,5–1,6	153,7	5 795	27,90	0,61	17,82	1,29
1,6–1,7	136,3	4 985	34,64	0,62	17,24	1,5
1,7–1,8	92,4	4 245	41,20	0,68	16,75	1,46
1,8–1,9	95,9	3 584	48,57	0,79	15,48	1,65
>1,9	1 898,5	964	77,16	0,39	10,86	1,45

3,15–1 [mm]						
Gęstość [g/cm <sup>3</sup> ]	Masa	Ciepło spalania [cal]	Zawartość popiołu [%]	Zawartość siarki [%]	Części lotne <i>V<sup>a</sup></i>	Wilgoć analit. <i>W<sub>a</sub></i>
<1,3	3 476,2	8 297	2,22	0,38	21,94	1,07
1,3–1,4	791,1	7 781	7,84	0,46	19,56	0,85
1,4–1,5	264,7	6 836	17,61	0,51	18,65	0,97
1,5–1,6	119,2	5 830	27,7	0,62	18,22	0,93
1,6–1,7	117,0	5 029	35,57	0,66	17,40	1,05
1,7–1,8	92,1	4 222	43,45	0,76	16,99	1,08
1,8–1,9	72,9	3 516	50,64	0,74	16,12	1,16
>1,9	1 422,2	630	81,31	0,35	11,53	1,05

1–0,5 [mm]						
Gęstość [g/cm <sup>3</sup> ]	Masa	Ciepło spalania [cal]	Zawartość popiołu [%]	Zawartość siarki [%]	Części lotne <i>V<sup>a</sup></i>	Wilgoć analit. <i>W<sub>a</sub></i>
<1,3	2 563,4	8 383	1,84	0,39	22,18	1,02
1,3–1,4	355,9	7 872	7,07	0,46	19,46	1,09
1,4–1,5	115,9	6 848	17,44	0,56	18,46	1,03
1,5–1,6	48,0	5 983	25,96	0,56	17,50	1,04
1,6–1,7	39,0	5 176	33,76	0,69	17,13	1,1
1,7–1,8	40,2	4 757	38,64	0,75	16,90	1,18
1,8–1,9	22,4	3 827	47,17	0,77	16,23	1,13
>1,9	609,2	959	77,49	0,37	12,64	1,06

## Literatura

- Aldrich C., 1998 – Visualization of transformed multivariate data sets with autoassociative neural networks, *Pattern Recognition Letters*, vol. 19, is. 8, pp. 749–764.
- Allen T., 1968 – Particle size measurement. London Chapman and Hall.
- Andrejew B.A., Zakaszanski M.S., Samsonow N.N., Fotiadi E.E., 1941 – Kurs gra-witacionnoj razwiedki. Gosgeolizdat.
- Andrejew S.E., Pierow W.A., Zwieriewicz W.W., 1980 – Droblenije, izmielczenije i grochoczenije poleznych iskopajemnych. Izd. Moskwa Niedra.
- Asimov D., 1985 – The Grand Tour: A Tool for Viewing Multidimensional Data. *SIAM Journal of Scientific and Statistical Computing*, vol. 6, no. 1, pp. 128–143.
- Assa J., Cohen-Or D., Milo T., 1997 – Displaying data in multidimensional relevance space with 2D visualization maps. *Proceedings. Visualization '97*, pp. 127–134. New York, NY, IEEE.
- Assa J., Cohen-Or D., Milo T., 1999 – RMAP: a system for visualizing data in multidimensional relevance space. *Visual Computer*, vol. 15, no. 5, pp. 217–234.
- Athreya K.B., 1987 – Bootstrap of the mean in the infinite variance case. *Ann. Statist.* 15, pp. 724–731.
- Athreya K.B., 1983 – Strong Law for the bootstrap. *Statist. Probab. Letters* 1, pp. 147–150.
- Atkinson P.M., 1993 – The effect of spatial resolution on the experimental semivariogram of air borne MSS imagery. *International Journal of Remote Sens.*, vol. 5, pp. 1005–1011.
- Atteia O., Debois J., Webster R., 1994 – Geostatistical analysis of soil contamination in Swiss Jura. *Environmental Pollution*, vol. 86.
- Balasubramanian K., Beg M.I., 1997 – Concominants of order statistics in Morgenstern type bivariate exponential distribution. *Journal of Applied Statistical Science*, 54(4), pp. 233–242.
- Baranowski P., Kossowski J., Usowicz B., 1994 – Spatial variability of soil water content in cultivated fields. *Zeszyty Prob. Post. Nauk Rolniczych*, vol. 405, pp. 9–19.
- Barskij L.A., Kozin W.Z., 1978 – Sistiennyj analiz w obogaszczennii poleznych iskopajemnych. Izd. Moskwa Niedra.
- Becker R.A., Cleveland W.S., Wilks A.R., 1987 – Dynamic graphics for data analysis. *Statistical Science* 2, pp. 355–395.
- Bellhouse D.R., 1977 – Some optimal designs for sampling in two dimensions. *Biometrika*, vol. 64, pp. 605–611.
- Benson B.E., 1966 – Using co-kriging to enhance subsurface characterization for prediction of contaminant transport. [W:] *Geostatistics for environmental and geotechnical applications*, edited

- by: Srivastava R.M., Rouhani S., Cromer M.V., Johnson A.I., American Society for Testing and Materials, Philadelphia.
- Beran R., Ducharme G.R., 1991 – Asymptotic Theory for Bootstrap Methods in Statistics. Univ. de Montreal, Montreal.
- Beran R., 1984 – Bootstrap method in Statistics. *J. d. Dt. Math. Verein* 86, pp. 24–30.
- Berger J.O., 1985 – Statistical decision theory and Bayesian analysis. New York, Springer-Verlag.
- Bernier J., 1991 – Bayesian analysis of robustness of models in water and environmental sciences. W zbiorze pod red. Ganoulis J.: *Water Resources Engineering Risk Assessment*, NATO ASI Series, vol. G 29, Berlin Springer-Verlag, pp. 203–229.
- Bernier J., 1994 – Quantitative analysis of uncertainties in water resources application for predicting the effects of changes. W zbiorze pod red. Duckstein L., Parent E.: *Engineering Risk in Natural Resources Management*, NATO ASI Series, Series E: Applied Sciences 275, pp. 343–358.
- Błaszczke S., 1972 – Przeróbka mechaniczna kopalin. Wyd. Śląsk, Katowice.
- Błaszczke W., 2009 – Przeróbka węgla kamiennego – wzbogacanie grawitacyjne. Wyd. IGSMiE PAN, Kraków.
- Bodziony J., 1960 – On certain hypothesis concerning the process of screening of granular bodies. *Bull. de l'Acad. Pol. des Sci.*, vol. VIII, no. 20.
- Bodziony J., 1965 – On the antology between a deterministic and a stochastic model of the kinetics of flotation. *Bull. de l'Acad. Pol. des Sci.*, vol. XIII, no. 5, pp. 31–36.
- Bowers W., Franklin S., Hudak J., McDermid G., 1994 – Forest structural damage analysis using semivariance. *Can. J. Remote Sens.*, vol. 20, pp. 102–115.
- Box G.E.P., Tiao G.C., 1992 – Bayesian inference in statistical analysis. John Wiley and sons INC, New York–Chichester–Brisbane–Toronto–Singapore.
- Breyer F., 1968 – Dichtebestimmungen an Gesteinen aus deutschen Erdölgebieten. *Beitrag zur angew. Geophys.* 7, nr 3.
- Brożek M., 1996 – Analiza wzbogalności i wzbogacania surowców mineralnych z uwzględnieniem ich właściwości fizycznych oraz oddziaływań między ziarnami. Wydawnictwo AGH, Kraków.
- Budryk W., 1946 – Wielkość pobieranych prób węgla do analizy chemicznej. *Przegląd Górniczy*, nr 9.
- Budryk W., 1947 – Wielkość ziarn próby węgla przeznaczonej do analizy sitowej. *Przegląd Górniczy*, nr 11.
- Buja A., Asimov D., 1985 – Grand Tour Methods: An Outline. *Computing Science and Statistics*, vol. 17, pp. 63–67.
- Butkiewicz J., 1977a – Wielowymiarowe uogólnienia rozkładu Weibulla. Ossolineum, Wrocław.
- Butkiewicz J., 1977b – Przegląd rozkładów wielowymiarowych. Ossolineum, Wrocław.
- Butkiewicz J., Hys E., 1977 – Wielowymiarowe uogólnienia rozkładu Weibulla oraz wykładniczego rozkładu Gumbela. Wrocław Ossolineum.
- Cacoullios T., 1966 – Estimation of a multivariate density. *Ann. Inst. Statist. Math.*, nr 18.
- Chatterjee A., Das P.P., Bhattacharya S., 1993 – Visualization in linear programming using parallel coordinates. *Pattern Recognition* 26(11), pp.1725–1736.
- Chentsov N.N., 1962 – Evaluation of an unknown distribution density from observations. *Soviet Math. Dokl.* 3, pp. 1159–1562.

- Chica-Olmo M., Abarca-Hernandez F., 2000 – Computing geostatistical image texture for remotely sensed data classification. *Comput. Geoscience*, vol. 26, pp. 373–383.
- Chilès J.P., Delfiner P., 1999 – *Geostatistics. Modeling spatial uncertainty*. Wiley, New York.
- Chou S.Y., Lin S.W., Yeh C.S., 1999 – Cluster identification with parallel coordinates. *Pattern Recognition Letters* 20, pp. 565–572.
- Cleveland W.S., McGill R., 1984 – The many faces of a scatterplot. *Journal of the American Statistical Association* 79, pp. 807–822.
- Cohen W.B., Spies T.A., Bradshaw G.A., 1990 – Semivariograms of digital imagery for analysis of conifer canopy structure. *Remote Sens. of Environment*, vol. 34, pp. 167–178.
- Cook D., Buja A., Cabrera J., Hurlley C., 1995 – Grand Tour and Projection Pursuit. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, vol. 4, no. 3 pp. 155–172.
- Cressie N.A.C., 1991 – *Statistics for spatial data*. Wiley, New York.
- Cressie N.A.C., Horton R., 1987 – A robust/resistant spatial analysis of soil-water infiltration. *Water Resources Research*, vol. 23, pp. 911–917.
- Curran P.J., 1988 – The semivariances in remote sensing: an introduction. *Remote Sens. of Environment*, vol. 24, pp. 493–507.
- Czornyj L.M., 1950 – Primienienie logarifmiczeski-normalnogo zakona raspriedielienija dla ras-czieta granulometriczeskich charakteristik izmielczennych materialow. *Dokł. AN SSSR*, 72, pp. 929–932.
- Czubek J.A., 1981 – *Introduction to geostatistics. Lectures Notes*, Reykjavik.
- David M., 1977 – *Geostatistical ore reserve Estimation*. Elsevier Scientific Publishing Co., Amsterdam.
- David M., 1988 – *Handbook of applied advanced geostatistical ore reserve estimation*. Elsevier, Amsterdam.
- Dębowska U., Zawadzki J., 2005 – Analiza statystyczna i geostatystyczna zróżnicowania przestrzennego parametrów położenia warstw w NW części Gór Świętokrzyskich. *Przegląd Geologiczny*, vol. 53, pp. 306–310.
- Devroye L., Györfi L., 1985 – *Nonparametric density estimation. The  $L_1$  View*, New York, Wiley.
- Dobosz M., 2001 – *Statystyczna analiza wyników badań*. Akademicka Oficyna Wydawnicza Exit, Warszawa.
- Domański C., Pruska K., 2000 – *Nieklasyczne metody statystyczne*. Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.
- Drzymała J., 2001 – *Podstawy mineralurgii*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław.
- Edgington E.S., 1987 – *Randomization Tests*. 2<sup>nd</sup> ed., Dekker, New York.
- Efromovich S., 1999 – *Nonparametric curve estimation*. New York, Springer-Verlag.
- Efron B., 1979 – Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife. *The Annals of Statistics*, no 7.
- Efron B., 1981 – Nonparametric standard errors and confidence intervals. *Canad. J. Statist.* 9.
- Efron B., 1982 – *The Jackknife, the Bootstrap and other Resampling Plans*. SIAM Philadelphia.
- Efron B., 1987 – Better bootstrap confidence intervals. *J. Amer. Statist. Assoc.* 82, pp. 171–200.
- Efron B., 1985 – Bootstrap confidence intervals for a class parametric problems. *Biometrika* 72, pp. 45–58.

- Efron B., Tibshirani R.J., 1993 – An introduction to the Bootstrap. Chapman and Hall, London.
- Efron B., Tibshirani R., 1996 – Using specially designed exponential families for density estimation. *Ann. Statist.* 24, pp. 2431–2461.
- Eggermont P.P.B., La Riccia V.N., 2001 – Maximum penalized likelihood estimation. Vol. I: Density estimation. Springer, New York.
- Eick S.G., Wills G.J., 1995 – High interaction graphics. *European Journal of Operational Research*, vol. 81, is. 3, pp. 445–459, March 16.
- Epanechnikov V.K., 1969 – Non-parametric estimation of a multivariate probability density. *Theory Prob. Appl.*, nr 14.
- Epstein B., 1948 – Logarithmic-normal distributions in breakage of solids. *Ind. Eng. Chem.*, 40, pp. 2289–2291.
- Eubank R.L., 1988 – Spline smoothing and nonparametric regression. Marcel Dekker, New York.
- Fabijańczyk R., 2010 – Statystyczna i geostatystyczna analiza możliwości wykorzystania pomiarów magnetometrycznych do oceny potencjalnego zanieczyszczenia gleb metalami ciężkimi. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa.
- Falivene O., Cabrera L., Sáez A., 2007 – Optimum and robust 3D facies interpolation strategies in a heterogenous coal zone (Tertiary As Pontes Basin, NW Spain). *International Journal of Coal Geology*, vol. 71, pp. 185–208.
- Fiering M.B., Rogers P., 1991 – Climate change and Water Resources Planning under Uncertainty. Draft Reporting, Inst. for Water Resources, Ft. Belvoir, VA: US Army Corps of Engineers.
- Firkowicz S. i in., 1977 – Metody statystyczne w sterowaniu jakością. PWN, Warszawa.
- Fisz M., 1969 – Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. PWN, Warszawa.
- Gajek L., Kałuszka M., 2000 – Wnioskowanie statystyczne. WNT, Warszawa.
- Gaudin A.M., Meloy T.P., 1962 – Model and comminution distribution equation for single fracture. *Trans. AIME*, 223, pp. 40–43.
- Gawlik L., Mirowski T., Mokrzycki E., Olkusiński T., Szurlej A., 2004 – Coal preparation versus losses of chemical energy in combustion processes. *Gospodarka Surowcami Mineralnymi*, vol. 20, no. 4, pp. 81–88.
- Geman S., Geman D., 1984 – Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian restoration of image. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* 6, pp. 721–741.
- Gennings C., Dawson K.S., Carter W.H., Jr. Myers R.H., 1990 – Interpreting plots of a multidimensional dose-response surface in a parallel coordinate system. *Biometrics* 46, pp. 719–735.
- Geweke J., 2000 – Simulation based Bayesian inference for economic time series. W zbiorze pod red. Mariano R.S., Schuermann T., Weeks M.: *Simulation-based inference in Econometric Methods and Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, pp. 255–294.
- Geweke J., 1999 – Using simulation method for Bayesian econometric models: inference, development and communication. *Econometric Reviews* 18, pp. 1–127.
- Goovaerts P., 1997 – Geostatistics for natural resources evaluation. Oxford University Press, New York.
- Goovaerts P., 1999 – Geostatistics in soil science: State-of-the-art and Perspectives. *Geoderma*, vol. 89, pp. 1–45.



- Goovaerts P., 2000 – Estimation Or simulation of soil properties? An optimization problem with conflicting criteria. *Geoderma*, 97(3–4), pp. 165–186.
- Goovaerts P., 2001 – Geostatistical modeling of uncertainty in soil science. *Geoderma*, vol. 103, pp. 3–26.
- Gottfried B.S., 1981 – Statistical representation of generalised distribution data for floatsink coal-cleaning devices: sand cones. *Int. J. Min. Processing*, nr 8, pp. 89–91.
- Grabski F., Jaźwiński J., 2001 – Metody bayesowskie w niezawodności i diagnostyce. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa.
- Gray H.L., Schucany W.R., 1972 – The Generalized Jacknife Statistic. Dekker, New York.
- Grumbrecht K., 1952 – Die Korrektur der durch Flächenausgleich gewonnen Verteilungszahlen – Kurve auf mathematischer und statistischer Grundlage. Glückauf, vol. 88.
- Guarascio M., David M., Huijbregts C., 1975–1976 – Advanced Geostatistics in the Mining Industry. [W:] Proceedings of the NATO ASI Series C24 Advanced Study Institute held at the Instituto di Geologia Applicata of the University of Rome, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht.
- Gy P., 1972 – Die probenahme bei stückigen Erzen. *Aufbereitungs Technik*, vol. 11, pp. 687–697.
- Hahn G.J., Shapiro S.S., 1994 – Statistical Models in Engineering. John Wiley, New York.
- Hall P., 1986 – On the bootstrap and confidence intervals. *Ann. Statist.* 14, pp. 1431–1452.
- Hall P., 1988 – Theoretical comparison of bootstrap confidence intervals. *Ann. Stat.* 16, pp. 927–985.
- Hall P., 1992 – The Bootstrap and Edgeworth Expansion. Springer-Verlag, New York.
- Hart J.D., 1997 – Nonparametric smoothing and Lack-of fit tests. New York, Springer.
- Hartigan J.A., Kleiner B., 1981 – Mosaic for Contingency Tables. [W:] Computer Science and Statistics: Proceedings of the 13<sup>th</sup> Symposium on the Interface, pp. 268–273, New York: Springer Verlag.
- Heidenreich H., 1962 – Ocena promyszlennych riezultatow obogaszczeniya poleznych iskopajemnych. Moskwa Niedra.
- Heike H., 2000 – Exploring categorical data: interactive mosaic plots. *Metrika* 51, pp. 11–26.
- Heriawan M.N., Koike K., 2008 – Identifying spatial heterogeneity of coal resorce quality in a multilayer coal deposit by multivariate geostatistics. *International Journal of Coal Geology*, vol. 73, pp. 307–330.
- Hindistan M.A., Tercan A.E., Ünver B., 2010 – Geostatistical coal quality control in longwall mining. *International Journal of Coal Geology*, vol. 81, pp. 139–150.
- Hobbs B.F., Chao P.T., Nayal M., Roger W.T., 1994 – Climate warming analyzing implications for Great Lakes management. W zbiorze pod red. Haimes Y.Y., Moser D., Stakhiv E.Z.: Risk Based Decision Making in Water Resources. American Society of Civil Engineers, New York, pp. 295–316.
- Hobbs B.F., Chao P.T., Venkatesh B.N., 1996 – Using decision analysis to include climate change in water resources decision making. *Climate Change* in press.
- Hurley C., Buja A., 1990 – Analyzing high-dimensional data with motion graphics. *SIAM Journal on Scientific & Statistical Computing*, vol. 11, no. 6, pp. 1193–1211.
- Inselberg A., Dimsdale B., 1994 – Multidimensional lines I: representation. *SIAM J. Appl. Math.* 54 (2), pp. 559–577.
- Inselberg A., 1985 – The plane with parallel coordinates. *Visual Computer* 1, pp. 69–91.

- Isaaks E.H., 1990 – The application of Monte Carlo methods to the analysis of spatially correlated data. Ph. D. Thesis, Stanford University, Stanford CA.
- Jain A.K., Mao J., 1992 – Artificial neural network for non-linear projection of multivariate data. [W:] Proc. IEEE Internat. Joint Conf. On Neural Networks, Baltimore, MD, vol. 3, pp.335–340.
- Jakomulska A., Clarke K., 2001 – Semivariogram-derived measures of textural image classification. [W:] Geostatistics for environmental applications, edited by: Monestiez P., Allard D., Froidevaux R., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Hardbound, pp. 345–355.
- Jamróz D., 2001 – Visualization of objects in multidimensional spaces. Ph.D. Thesis, AGH, University of Science and Technology, Cracow.
- Jamróz D., 2009 – Multidimensional labyrinth – multidimensional virtual reality. [W:] Cyran K., Kozielski S., Peters J., Stanczyk U., Wakulicz-Deja A. (eds.): Man-Machine, Interactions, AISC, vol. 59, pp. 445–450. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, Germany.
- Johnson N.L., Kotz S., 1972 – Distributions in Statistics, Continuous Multivariate Distributions. John Wiley, New York.
- Journel A.G., Huijbregts C.J., 1978 – Mining Geostatistics. Academic Press, New York, London.
- Jupp D.L.B., Strahler A.H., Wodcock C.E., 1988 – Autocorrelation and regularization in digital images. I. Basic Theory. IEEE Geosciences and Remote Sens., vol. 26, pp. 467–473.
- Jupp D.L.B., Strahler A.H., Wodcock C.E., 1989 – Autocorrelation and regularization in digital images. II. Simple Images Models. IEEE Geosciences and Remote Sens., vol. 27, pp. 247–258.
- Kelly E.G., Spottiswood D.J., 1989 – The Theory of Electrostatic Separations, a Review. Part I. Fundamentals. Minerals Engineering 2/1, 33–46.
- Kim S., Kwon S., Cook D., 2000 – Interactive visualization of hierarchical clusters using MDS and MST. Metrika 51, pp. 39–51, Springer-Verlag.
- Kint V., van Meirvenne M., Nechtergale L., Guedens G., Lust N., 2003 – Spatial methods for quantifying forest stand structure development: A comparison between nearest-neighbor indices and variogram analysis. Forest Science, 49(1), pp. 26–49.
- Koch G., Link R., 1986 – Statistical analysis of geological data. Wiley, New York.
- Kohl M., Gertner G., 1997 – Geostatistics in evaluating forest damage surveys: considerations on methods for describing spatial distributions. Forest Ecology and Management, vol. 95, pp. 131–140.
- Kołmogorow A.N., 1941 – O logarytmiczieski normalnom zakonie raspriedielienija razmierow czastic pri drobleniji. Dokł. AN SSSR, 31, pp. 99–101.
- Kraaijeveld M., Mao J., Jain A.K., 1995 – A nonlinear projection method based on Kohonen's topology preserving maps. IEEE Trans. Neural Networks 6(3), pp. 548–559.
- Kraj W., 1967a – The determination of the average number of randomly distributed rare grains per volume unit of the rock. Bull. de l'Acad. Pol. des Sci., vol. XV, no. 7, pp. 419–425.
- Kraj W., 1967b – Application of the correlation theory of random functions to the determination of the capacity of the averaging container. Bull. de l'Acad. Pol. des Sci., vol. XV, no. 3, pp. 163–169.
- Krawczykowski D., Krawczykowska A., Trybalski K., 2012 – Laser particle size analysis – the influence of density and particle shape on measurement results. Gospodarka Surowcami Mineralnymi, vol. 28, no 4, pp. 101–112.

- Krige D.G., 1951 – A statistical approach to some basic mine valuation problems on the Witwaterland. *Journal Chem. Metali. Min. Sc. South Africa*, vol. 52, pp. 119–139.
- Krige D.G., 1975–1976 – A review of the developments of geostatistics in South Africa. In *Advanced Geostatistics in the Mining Industry*. [W:] Proceedings of the NATO Advanced Study Institute held at the University of Rome, edited by: Guarascio M., David M., Huijbregts C., D. Reidel Publishing Co., Dordrecht.
- Krige D.G., 1976 – Some basic considerations in the application of geostatistics to gold ore valuations. *J.S. Afr. Inst. Min. Metali.*, vol. 76, pp. 383–391.
- Krige D.G., 1981 – Lognormal-de Wijsian Geostatistics for ore evaluation. South African Institute of Mining and Metallurgy, Johannesburg.
- Krige D.G., Guarascio M., Camisani-Calzolari F.A., 1989 – Early South African geostatistical techniques in today's perspective. [W:] *Geostatistics*, edited by: Armstrong M., Kluwer Academic Publisher, Amsterdam, pp. 1–19.
- Krutichowskaja Z.A., Kużełow G.K., 1960 – Primienienie geofizycznych metodow dla izuczzenia żeliezorudnych formacij Ukrainskowo kristaliczieskowo szczita. *Gosgeol-technizdat*.
- Krzyśko M., 1997 – *Statystyka matematyczna II*. Wydawnictwo Uniwersytetu im. A. Mickiewicza, Poznań.
- Li W., Yue H.H., Valle-Cervantes S., Qin S.J., 2000 – Recursive PCA for adaptive process monitoring. *Journal of Process Control*, vol. 10, is. 5, pp. 471–486.
- Lowrison G.C., 1974 – *Crushing and grinding*. London Butterworth.
- Lyman G.J., 1993 – Application of Line-Length Related Interpolation Methods to Problems in Coal Preparation – III: Two dimensional Washability Data Interpolation. *Coal Preparation*, vol. 13, pp. 179–195.
- Lynch A.J., 1977 – *Mineral crushing and grinding circuits; their simulation, optimisation, design, and control*. Amsterdam-Oxford-N.York, Elsevier Sci. Publ. Co.
- Mammen E., 1992 – *When does Bootstrap work? Asymptotic Results and Simulation*. Lecture Notes in Statistics 77, Springer-Verlag, New York.
- Mao J., Jain A.K., 1995 – Artificial neural networks for feature extraction and multivariate data projection. *IEEE Trans. Neural Networks* 6(2), pp. 296–317.
- Marceau D., Gratton D., Fournier R., Fortin J., 1994 – Remote sensing and the measurement of geographical entities in a forested environment. The optimal spatial resolution. *Remote Sens. Environment*, vol. 49, pp. 105–117.
- Marceau D., Howarth P., Gratton D., 1994 – Remote sensing and the measurement of geographical entities in a forested environment. The scale and spatial aggregation problem. *Remote Sens. Environment*, vol. 49, pp. 93–104.
- Martyniak J., 2004 – Niepewność wyników oznaczania właściwości produktu ziarnistego w badaniach wrywkowych. *Gospodarka Surowcami Mineralnymi*, t. 20, z. 2, Wyd. IGSMiEPAN, Kraków.
- Marx G., Moskala R., Schneider-Kuhn U., 1999 – Gravity Separation with Wet Jigs. *Aufbereitungs Technik*, vol. 40, pp. 215–224.
- Matheron G., 1962–1963 – *Traite de Geostatistique Applique*. Tome 1. Memoires de Bureau de Recherches Geologiques et Minieres, vol. 14, Editions Technip, Paris.

- Matheron G., 1971 – The Theory of Regionalized Variables and its Applications. Les Achiers du Centre de Morphologie Mathematique de Fontainebleau, vol. 5, Ecole National Superieure des Mines de Paris.
- Matheron G., 1975 – A simple substitute for conditional expectation: The disjunctive kriging. *Proceedings of Geostat'75*, pp. 221–236.
- Matheron G., 1989 – Estimating and Choosing – An Essay on Probability in Practice. Springer-Verlag, Berlin.
- McBratney A.B., Webster R., 1986 – Choosing function for semivariograms of soil properties and fitting them to sampling estimates. *Journal of Soil Sciences*, vol. 37, pp. 617–639.
- Miranda F.P., Carr J.R., 1994 – Application of the semivariogram textural classifier for vegetation discrimination using SIR-B data of the Guiana Shield, north-western Brazil. *Remote Sens. Rev.*, vol. 10, pp. 155–168.
- Miranda F.P., McDonald J., Carr J.R., 1992 – Application of the semivariogram textural classifier (STC) for vegetation discrimination using SIR-B data of Borneo. *International J. Remote Sens.*, vol. 13, pp. 2349–2354.
- Mucha J., 2002 – Struktura zmienności zawartości Zn i Pb w śląsko-krakowskich złożach rud Zn-Pb. *Studia, Rozprawy, Monografie nr 108*, Wydawnictwo IGSMiE PAN, Kraków.
- Mucha J., Wasilewska M., 2006 – Nieparametryczne metody geostatystyczne interpolacji parametrów złożowych. *Przegląd Górniczy*, vol. 1, pp. 24–30.
- Mucha J., Wasilewska M., 2009 – Trójwymiarowe modelowanie wartości parametrów złożowych metodą krigingu zwyczajnego 3D. *Geologia*, vol. 3, (2/1), pp. 169–176.
- Namysłowska-Wilczyńska B., 1993 – Zmienność złóż rud miedzi na monoklinie przedsudeckiej w świetle badań geostatystycznych. *Prace Naukowe Instytutu Geotechniki i Hydrotechniki Politechniki Wrocławskiej nr 64, Seria Monografie 21*, pp. 1–205.
- Namysłowska-Wilczyńska B., 1994 – Geostatystyka i GIS w ochronie środowiska. *Materiały Konferencyjne „Komputerowe Wspomaganie Badań Naukowych – KOWBAN '94”*, Wrocławskie Towarzystwo Naukowe, Wrocław.
- Namysłowska-Wilczyńska B., 1995 – Wybrane metody symulacji geostatystycznej. WTN, Wrocław.
- Namysłowska-Wilczyńska B., 2006 – Geostatystyka. Teoria i zastosowania. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław.
- Namysłowska-Wilczyńska B., Wilczyński A., 1997 – Badania geostatystyczne zanieczyszczenia gleb metalami ciężkimi w wybranych rejonach Górnego Śląska, *Ochrona Środowiska*, 2(65), pp. 9–18.
- Namysłowska-Wilczyńska B., Wilczyński A., 2002 – Multivariate estimation and simulation for environmental data modeling: processing of heavy metals concentration data in soil. *Data Science Journal*, 1(1), pp. 27–44.
- Namysłowska-Wilczyńska B., Wilczyński A., 2003 – Funkcja wariogramu jako narzędzie badania zmienności obciążeń elektrycznych w układzie powierzchniowym. *Elektroenergetyka*, 4(47), pp. 18–34.
- Namysłowska-Wilczyńska B., Wilczyński A., Tymorek A., 2004 – Modelowanie powierzchniowego obrazu zmian obciążeń elektrycznych z zastosowaniem krigingu log normalnego. *Elektroenergetyka*, 1(48), pp. 1–15.

- Nawrocki J., 1976 – Analityczno-graficzne metody oceny pracy wzbogacalników grawitacyjnych. Katowice Wyd. Śląsk.
- Neal R.M., 1996 – Bayesian Learning for Neural Networks, Springer, Berlin.
- Niedoba T., 2003a – Różne aspekty wyznaczania wielkości próbki pobieranej z materiałów uziarnionych. Mat. konf. III Konferencji Doktorantów „Zagadnienia interdyscyplinarne w górnictwie i geologii”, pp. 285–291, Wrocław.
- Niedoba T., 2003b – Ocena jakości produktu przy pomocy metod bayesowskich na przykładzie złoża „Rudna”. Inżynieria Mineralna, n. 3, pp. 134–141.
- Niedoba T., 2004 – The utilization of non classical statistical methods in raw materials’ quality estimation – the estimation of economical risk. Proceedings of 8th International Conference on Environment and Mineral Processing, vol. 2, pp. 29–35, Ostrava.
- Niedoba T., 2006 – Opracowanie zasad opróbowania i analizy jakości surowców mineralnych metodami statystyki nieklasycznej. Praca doktorska, AGH, Kraków.
- Niedoba T., 2007 – Ocena zawartości popiołu w pokładach węgla za pomocą nieparametrycznych metod statystycznych. Górnictwo i Geoinżynieria, vol. 4, pp. 39–50.
- Niedoba T., 2009 – Wielowymiarowe rozkłady charakterystyk materiałów uziarnionych przy zastosowaniu nieparametrycznej aproksymacji funkcji gęstości rozkładów brzegowych. Górnictwo i Geoinżynieria, 4, 235–244.
- Niedoba T., 2010 – Application of Kriging in Approximations of Grained Materials Characteristics Distribution Functions. In Proceedings of XXV International Mineral Processing Congress, Brisbane, pp. 3321–3326.
- Niedoba T., 2011a – Three-dimensional distribution of grained materials characteristics, in Proceedings of the XIV Balkan Mineral Processing Congress. Tuzla, 1, 57–59.
- Niedoba T., 2011b – Zastosowanie krigingu zwyczajnego dla oszacowania zawartości popiołu w węglu w zależności od gęstości i rozmiaru ziarna. Górnictwo i Geologia, vol. 6(2), pp. 159–166.
- Niedoba T., 2013 – Statistical analysis of the relationship between particle size and particle density of raw coal. Physicochemical Problems in Mineral Processing, vol. 49, pp. 175–188.
- Niedoba T., Surowiak A., 2012 – Type of coal and multidimensional description of its composition with density and ash contents taken into consideration. [W:] Proceedings of XXVI International Mineral Processing Congress, New Delhi, pp. 3844–3854.
- Niedoba T., Tumidajski T., 2005 – Aproksymacja krzywych składu ziarnowego za pomocą różnych metod statystycznych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Górnictwo, vol. 266, pp. 125–138.
- Niedoba T., Tumidajski T., 2006 – The approximation of grain composition curves by non-parametric statistical methods. [W:] Önal G. (ed.): Proceedings of XXIII International Mineral Processing Congress, vol. 1, pp. 203–208, Istanbul.
- Niedoba T., Tumidajski T., 2008 – Multidimensional analysis of coal separation processes. [W:] Proceedings of XXIV International Mineral Processing Congress, Beijing, 2, 2357–2364.
- Niedoba T., Tumidajski T., 2012a – Application of ordinary kriging in purpose of determination of ash contents in coal dependably on density and particle size of comminuted material. [W:] Proceedings of XXVI International Mineral Processing Congress, Delhi, pp. 3835–3843.
- Niedoba T., Tumidajski T., 2012b – Determination of Ash Contents in Coal by Means of Ordinary Kriging Method. Journal of Earth Science and Engineering, vol. 2, is. 10, pp. 571–576.

- Noren E.W., 1989. – Computer-Intensive Methods Testing Hypotheses: an Instruction. Wiley, New York.
- Olea R.A., 1999 – Geostatistics for Engineers and Earth Scientists. Kluwer Academic Publisher, Boston.
- Olejniak T., Surowiak A., Gawenda T., Niedoba T., Tumidajski T., 2010 – Wielowymiarowe charakterystyki węgla jako podstawa do oceny i korekty technologii ich wzbogacania. *Górnictwo i Geoinżynieria*, vol. 34, is. 4/1, pp. 207–216.
- Ozerskaja M.L., 1955 – Fizyčeskie swojstwa porad kristaliczeskowo fundamenta. *Prikl. Geofiz.*, wyp. 13, Gostoptechnizdat.
- Panatić Y., 1996 – Variowin Software for Spatial Data Analysis in 2D. Springer, New York.
- Paolo M.J., Stein A., Tome M., 2002 – A spatial statistical analysis of cork oak competition in two Portuguese silvopastoral systems. *Canadian Journal of Forest Research*, 31(11), pp. 1893–1903.
- Parker H., 1982 – Trends in geostatistics in the mining industry. [W:] *Geostatistics for Natural Resources Characterization*. Edited by: Verly G., David M., Journel A.G., Marechal A., NATO Advanced Study Institute, D. Reidel Publishing Co., pp. 915–934, Dordrecht.
- Parr W.C., 1983 – A note on the jackknife, the bootstrap and the delta method estimators of bias and variance. *Biometrika* 70, pp. 719–722.
- Parzen E., 1962 – On estimation of probability density function and mode. *Ann. Math. Statist.*, nr 33.
- Podoba N.W., 1959 – Riezultaty izučzenia platnosti porad dokiembrijoskowo fundamenta was-tocznoj cziaści Pyskoj platformy i opyt iz sowmiestnowo izučzenia c geofizyčeskimy danym., *Prikl. Geofiz. Wyp.* 22.
- Prakasa Rao B.L.S., 1983 – Nonparametric functional estimation. Academic Press, New York.
- Pudło W., 1971 – O pewnej metodzie aproksymowania krzywych wzbogacalności. *Zeszyty Problemowe Górnictwa PAN*, vol. 9, is. 2.
- Pudło W., Szczepańska M., 1976 – Matematyczne modele pewnych typów procesów wielostadialnych jednokierunkowych. *Zeszyty Problemowe Górnictwa PAN*, vol. 14, pp. 53–78.
- Ravenscroft P., Armstrong M., 1985 – Kriging of block models, the dangers re-emphasized. [W:] *Proceedings of APCOM*, Berlin, pp. 577–587.
- Rendu J., 1988 – Kriging for ore valuation and mine planning. *Engineering and Mining Journal*, vol. 81(909).
- Rendu J.M., 1979 – An Introduction to the Geostatistical Methods of Mineral Evaluation. S. African Inst. Min. Metall. Monograph Series, Johannesburg.
- Rittinger P. von, 1867 – *Lehrbuch der Aufbereitungskunde*. Berlin Verl. Von Erst und Korn.
- Róg L., 2009 – Możliwości wykorzystania zespołów krzywych wzbogacalności do oceny właściwości fizykochemicznych koncentratów węgla kamiennych. *Przegląd Górniczy*, vol. 65, no 7–8, pp. 96–109.
- Róg L., 2011 – Możliwości wykorzystania zespołów krzywych wzbogacalności do oceny właściwości koksowniczych koncentratów węgla kamiennych. *Przegląd Górniczy*, vol. 7–8, pp. 129–134.
- Rosenblatt M., 1956 – Remarks on some nonparametric estimates of a density function. *Ann. Math. Statist.* 27.
- Rosin P., Rammeler E., 1933 – The laws governing the fineness of powdered coal. *J. Inst. Fuel* 7, pp. 29–36.

- Rouhani S., Srivastava R., Desbarats A., Cromer M., Johnson A., 1995 – Geostatistics for environmental and geotechnical applications. West Conshohocken.
- Royle A.G., 1979 – Why geostatistics. *Engineering and Mining Journal*, 180(5).
- Saikia K., Sarkar B.C., Sinha P.M., 2007 – Application of kriging and simulated annealing for spatial variability modeling of a coal seam. *Applied Earth Science*, vol. 1(116), pp. 37–48.
- Sain S.R., 2001 – Multivariate locally adaptive density estimation. *Communication in Statistics: Theory and Methods*, vol. 30, pp. 1869–1888.
- Saramak D., Tumidajski T., 2006 – Rola i sens aproksymacji krzywych składu ziarnowego surowców mineralnych. *Górnictwo i Geoinżynieria*, 3/1, 301–313.
- Scaria J., Nair N.U., 1999 – On concomitants of order statistics from Morgenstern family. *Biometrical Journal*, 41, 4, 483–489.
- Schwartz S.C., 1967 – Estimation of a probability density by an orthogonal serie. *Ann. Math. Statist.* 38, pp. 1262–1265.
- Schuhmann R., 1960 – Energy input and size distribution in comminution. *Trans. AI-ME*, 217, pp. 22–25.
- Scott D.W., 1992 – Multivariate density estimation. Wiley, New York.
- Sichel H.S., 1952 – New methods in the statistical evaluation of mine sampling data. *Trans. Inst. Min. Metall.*, vol. 61, part 6, London.
- Silverman B.W., 1986 – Nonparametric density estimation for statistic and data analysis. London New York, Chapman and Hall.
- Sobczyk M., 2001 – Statystyka. PWN, Warszawa.
- Sobol M.G., Klein G., 1989 – New graphics as computerized displays for human information processing. *IEEE Trans. Systems Man Cybernet.* 19(4), pp. 893–898.
- Srivastava R.M., Parker H.M., 1988 – Robust measures of spatial continuity in geostatistics. [W:] *Proceedings of the Third International Geostatistics Congress, Avignon*, edited by: Armstrong M.
- Stach A., 2007 – Estymacja i symulacja pola prawdopodobieństwa maksymalnych opadów dobowych. [W:] *Funkcjonowanie geosystemów zlewni rzecznych 4, Procesy ekstremalne w środowisku geograficznym*, red: Kostrzewski A., Szpikowski J., UAM Poznań, Wyd. Naukowe Bogucki Poznań, pp. 51–65.
- Stach A., 2007 – Zmienność czasowa struktury przestrzennej maksymalnych sum dobowych opadów. *Monitoring Środowiska Przyrodniczego*, vol. 8, pp. 73–90.
- Stanisz A., 2007 – *Przystępny kurs statystyki. Tom 3: Analizy wielowymiarowe*. Wyd. Statsoft Polska Sp. z o.o.
- Stein M.L., 1985 – A simple model for spatial-temporal processes with an application to estimation of acid deposition. Technical Report No. 82, Department of Statistics, Stanford University, Stanford CA.
- Stępiński W., 1964 – *Wzbogacanie grawitacyjne*. Łódź – Warszawa – Kraków, PWN.
- Stone C.J., 1984 – An asymptotically optimal window selection rule for kernel density estimates. *Ann. Statist.* 12, pp. 1285–1297.
- St-Onge B.A., Cavayas F., 1995 – Estimating forest stand structure from high resolution imagery using the directional semivariogram. *International Journal of Remote Sens.*, vol. 16, pp. 1999–2001.

- St-Onge B.A., Cavayas F., 1997 – Automated forest structure mapping from high resolution imagery based on directional semivariogram estimates. *Remote Sens. Environ.*, vol. 61, pp. 82–95.
- Szarapow I.P., 1966 – O statisticzeskom rasiedelenii ilotnosti rudosoderzaszczich gornych porad. *Fizika Ziemli*.
- Szreder M., 1994 – Informacje a priori w klasycznej i bayesowskiej estymacji modeli regresji. Wyd. Uniw. Gdańskiego, Gdańsk.
- Sztaba K., 1956. – Krzywe rozdziału w procesie klasyfikacji mokrej. *Arch. Of Mining Sciences*, vol. 1, is. 2.
- Sztaba K., 1987 – Współwystępowanie efektów klasyfikacji i wzbogacania w procesach przepływowych. *Phys. Problems of Mineral Processing*, vol. 20.
- Sztaba K., 2003 – Identyfikacja i ocena wybranych właściwości surowców mineralnych. [W:] Sztaba K. (red.): *Identyfikacja i ocena wybranych właściwości surowców mineralnych oraz procesów ich przeróbki*, pp. 23–58, Wyd. IGSMiE PAN, Kraków.
- Tarchow G., 1956 – O statisticzeskoj obrabotkie rezultatow masowych opriedelienij fizyczeskich swojost obrazcow gornych porad. *Prikl. Geofiz. Wył.* 20.
- Tarter M.E., Lock M.D., 1990 – *Model-Free Curve Estimation, Modelling and Simulation.*, Philadelphia: SIAM.
- Terra A., 1939 – Determination pratique de l'écart probable en densité. *Rev. Ind. Miner.*
- Tichonow O.N., 1984 – Zakonomiornosti effiektiwnogo razdielienija minieralów w prociessach obogaszczeniija poleznych iskopajemnych. *Izd. Moskwa Niedra*.
- Tompson J.R., Tapia R.A., 1990 – *Nonparametric function estimation modelling and simulation.* Philadelphia, SIAM.
- Touati M., Iooss B., Galli A., 1999 – Quantitative control of migration: A Geostatistical Attempt. *Mathematical Geology*, vol. 31, pp. 277–295.
- Tromp K., 1937 – Neue Wege für die Verteilung der Aufbereitung von Steinkohlen. *Glückauf*, nr 73.
- Tumidajski T., 1992 – Wybrane problemy stochastycznej analizy własności materiałów uziarnionych i procesów przeróbki surowców mineralnych. *Zeszyty Naukowe AGH, Górnictwo 159*, Kraków.
- Tumidajski T., 1993 – Zastosowanie metod statystycznych w analizie procesów przerobczych. Katowice, Wyd. Śląsk.
- Tumidajski T., 1996 – Stochastic models of separation of mineral raw materials. *Arch. Min. Sciences*, vol. 41, pp. 245–258.
- Tumidajski T., 1997 – Stochastyczna analiza własności materiałów uziarnionych i procesów ich rozdziału. Wydawnictwo AGH.
- Tumidajski T., Niedoba T., 2008 – Multidimensional analysis of coal separation processes. *Proceedings of XXIV IMPC, Beijing*, 2, pp. 2363–2364.
- Tumidajski T., Saramak D., 2009 – *Metody i modele statystyki matematycznej w przeróbce surowców mineralnych.* Wydawnictwo AGH, Kraków.
- Tumidajski T., Siwiec A., 1984 – Two-dimensional distributions of the characteristics of feed and their relations with the evaluation of beneficiation. [W:] *Conference Proceedings of VII ICAMC*, Budapeszt.
- Tumidajski T., Wieniewski A., 1988 – Rozkłady wartości ekstremalnych w procesach przerobczych. *Zesz. Nauk. AGH, Górnictwo*, vol. 12, pp. 171–178.



- Usowicz B., 1999 – Zastosowanie analizy geostatystycznej i teorii fraktali w badaniach dynamiki wilgotności w profilu glebowym na polach uprawnych. *Acta Agrophysica*, vol. 22, pp. 229–243.
- Usowicz B., Marczewski W., Lipiec J., Usowicz J.B., Sokołowska Z., Dąbkowska-Naskręt H., Hajnos M., Łukowski M.I., 2009 – Woda w glebie. Pomiary naziemne i satelitarne w badaniach zmian klimatu. PAN, Komitet Agrofizyki, Wydawnictwo Naukowe FRNA.
- Usowicz B., Usowicz Ł., 2004 – Punktowe pomiary wilgotności gleb a jej przestrzenny rozkład na polach uprawnych. *Acta Agrophysica*, 4(2), pp. 571–588.
- Vehtari A., Heikonen J., Lampinen J., Juurari J., 1998 – Using Bayesian neural networks to classify forest scenes. W zbiorze pod red. Casasent D.P.: *Proceedings of SPIE 3522*, SPIE, pp. 66–73.
- Vehtari A., Lampinen J., 2000 – Bayesian MLP neural networks for image analysis. *Pattern Recognition Letters* 21, pp. 1183–1191.
- Verly G., David M., Journel A.G. (ed.), 1984 – *Geostatistics for Natural Resources Characterization*. Two volumes. NATO ASI Series C-122, Reidel, Dordrecht.
- Wahba G., 1981 – Data-based optimal smoothing of orthogonal series density estimates. *Ann. Statist.* 9, pp. 146–156.
- Wallace C.S.A., Watts J.M., Yool S.R., 2000 – Characterizing the spatial structure of vegetation communities in the Mojave Desert using geostatistical techniques. *Comput. Geosci*, vol. 26, pp. 397–410.
- Watson G.S., 1963 – On the estimation of the probability density. I, *Ann. Math. Statist.* 34.
- Watson G.S., 1969 – Density estimation by orthogonal series. *Ann. Math. Statist.* 40, pp. 1496–1498.
- Watson W.D., Ruppert L.F., Bragg L.J., Tewalt S.J., 2001 – A geostatistical approach to predicting sulfur content in the Pittsburgh coal bed. *International Journal of Coal Geology*, vol. 48, pp. 1–22.
- Webster R., Oliver M., 2000 – *Geostatistics for environmental scientists*. Wiley Ltd, Chichester.
- Wegman E.J., 1990 – Hyper-dimensional data analysis using parallel coordinates. *J. Amer. Statist. Assoc.* 85 (411), pp. 664–675.
- Whittle P., 1958 – On the smoothing of probability density functions. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*.
- Wichiriew B.W., 1961 – Primienienie matematycznej statistiki pri izuczinnii platnosti gornych porad. *Biuł. Naucz.-techn. Inż. WiMS*, nr 6, pp. 34.
- Zawadzki J., 2002 – Badania korelacji przestrzennych zawartości pierwiastków śladowych w glebach Warszawy i jej okolic. *Ochrona Środowiska*, 4(87).
- Zawadzki J., 2005 – Wykorzystanie metod geostatystycznych w badaniach środowiska przyrodniczego. *Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, Inżynieria Środowiska*, vol. 49.
- Zawadzki J., 2011 – *Metody geostatystyczne dla kierunków przyrodniczych i technicznych*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa.
- Zawadzki J., Cieszewski C.J., Zasada M., Lowe R.C., 2005 – Applying geostatistics for investigations of forest ecosystems using remote sensing imagery. *Silva Fennica*, vol. 39(4), pp. 599–617.

## **Wielowymiarowe charakterystyki zmiennych losowych w opisie materiałów uziarnionych i procesów ich rozdziału**

### **Streszczenie**

W monografii omówiono metody wielowymiarowej analizy statystycznej i przedstawiono ich zastosowania w szeroko rozumianej przeróbce surowców mineralnych. Ukazano jak ważna w procesie analizy statystycznej jest pełna informacja na temat badanego materiału, zawierająca jego istotne charakterystyki. Tylko pełen opis materiału uziarnionego daje możliwość pełnej oceny jego jakości, a tym samym może być wiarygodną podstawą jego przyporządkowania do określonej grupy materiałów.

Monografia złożona jest, oprócz wprowadzenia i zakończenia, z trzech rozdziałów głównych. W rozdziale drugim przedstawiono teoretyczne założenia dotyczące różnych typów modeli probabilistycznych, które można stosować w przeróbce surowców mineralnych. Przedstawiono możliwości aproksymacji krzywych, jak również powierzchni wzbogacalności i wzbogacania, przy zastosowaniu m. in. technik Morgensterna, jak również założenia teoretyczne dotyczące metody krigingu – metody stosowanej głównie w tzw. geostatystyce.

Przedstawiono również zasady stosowalności tzw. nieklasycznych metod statystycznych do analizy, zarówno jedno- jak i wielowymiarowej, charakterystyk materiałów uziarnionych, wśród których wymienić należy metody nieparametryczne, tj. metody jądrowe, metodę Fouriera. Omówiono także rozkłady warunkowe, wliczając w to zastosowanie tzw. metod bayesowskich.

W rozdziale trzecim omówiono zastosowanie praktyczne metod omówionych teoretycznie w rozdziale drugim. Przedstawiono m. in. aproksymację krzywych i powierzchni wzbogacalności oraz rozkłady wielowymiarowe charakterystyk materiału uziarnionego na przykładzie węgla. W tym celu zastosowano różne metody statystyczne, włączając w to metody bayesowskie oraz aproksymację nieparametryczną. Ponadto przedstawiono wykorzystanie metody krigingu do interpolacji wartości wybranych parametrów opisowych na przykładzie charakterystyk węgla, stosując różnego typu funkcje wariogramu. Tego typu aplikacja metody krigingu jest nieznana w dotychczasowych jej zastosowaniach.

Zastosowana w rozdziale trzecim metodyka pozwoliła na wyprowadzenie wniosków, że dwuwymiarowa aproksymacja krzywych wzbogacalności Henry'ego może być z powodzeniem stosowana w praktyce. Zastosowanie nieparametrycznych metod statystycznych (tj. metod jądrowych i metody Fouriera) w celu aproksymacji rozkładu zawartości popiołu

w węglu, będącym mieszaniną materiału pobranego z różnych pokładów daje bardzo dobre rezultaty. Na podstawie przeprowadzonych badań okazało się, że rozkład zawartości popiołu w nadawie węgla należy rozpatrywać jako mieszaninę rozkładów tej cechy w poszczególnych pokładach. Stosowanie metod bayesowskich w aproksymacji parametrów rozkładu Weibulla, opisującego skład ziarnowy materiału, pozwala na dokładniejszą jego ocenę. Wydaje się słusznym stosowanie tej metody estymacji parametrów rozkładów przy określaniu teoretycznych krzywych składu ziarnowego, jak i rozkładów innych wielkości charakteryzujących materiał uziarniony.

Zaprezentowano również wielowymiarową analizę materiału uziarnionego na przykładzie węgla, podzielonego na klaso-frakcje. Zaproponowano kilka metod aproksymacji – tradycyjną, opartą na iloczynie dystrybuant składu ziarnowego i gęstościowego analizowanego materiału oraz metodę opartą na tzw. rozkładach Morgensterna. Okazało się, że metoda Morgensterna daje zdecydowanie lepsze efekty i jakość dopasowania niż tradycyjny iloczyn zmiennych losowych. Oprócz klasycznych aproksymant w analizie wielowymiarowej zastosowano także metody nieparametryczne. Zastosowana metodyka pozwoliła na stwierdzenie, że zastosowanie metody Fouriera do estymacji funkcji regresji dało możliwość uzyskania postaci analitycznej rozkładu warunkowego zmiennej losowej opisującej wielkość ziarna przy założonej wartości jego gęstości. Znając rozkład gęstości ziarna, która najczęściej aproksymowana jest za pomocą rozkładów Weibulla lub rozkładu logistycznego możliwe jest utworzenie dwuwymiarowego rozkładu opisującego rozmiar i gęstość ziarna.

Metoda krigingu zwyczajnego wraz z jej aplikacją do określania wartości różnych cech materiału uziarnionego, przy określonych warunkach okazała się być bardzo pomocnym instrumentem. Metoda ta daje możliwość uzyskania bardzo dokładnej informacji na temat badanego materiału w momencie, gdy badacz nie dysponuje pełnymi wynikami analiz lub są one niezbyt dokładne. Dowiedziono, że zastosowanie metod krigingu do zagadnień związanych z przeróbką surowców mineralnych pozwala na lepszą aproksymację zależności między właściwościami badanego materiału. Metoda ta pozwala również na utworzenie większej liczby danych pomiarowych, które mogą pozwolić na podział badanego materiału na węższe frakcje, a więc na bardziej precyzyjne modelowanie różnego rodzaju krzywych i powierzchni stosowanych w przeróbce surowców mineralnych.

Rozdział czwarty poświęcony jest wizualizacji wielowymiarowych danych. Zaprezentowano i omówiono zasady metody tuneli obserwacyjnych, którą następnie zastosowano dla danych dotyczących trzech typów węgla. Na podstawie tej metody stwierdzono, że dokładna charakterystyka materiału uziarnionego umożliwia identyfikację źródła jego pochodzenia i daje szansę na wyodrębnienie różnic pomiędzy materiałami, które nie są widoczne przy zastosowaniu tradycyjnych metod. Metody te są nowatorskie, a ich zastosowanie w przeróbce surowców mineralnych do tej pory nieznanne.

Całość pracy zakończono podsumowaniem, które eksponuje główne wnioski płynące z pracy i odnosi się do każdej z metod, zastosowanej w niniejszym opracowaniu.

## **Multidimensional characteristics of random variables in description of grained materials and their separation processes**

### **Abstract**

The methods of multidimensional statistical analysis were discussed in the monograph and their applications in widely understood mineral processing were presented. It was shown how important during statistical analysis is to have full information about the researched material which carries its significant characteristics. Only the full description of the grained material gives the possibility of complete evaluation of its quality and can be treated as trustworthy basis to qualify it to certain group of materials.

Apart from introduction and ending, the monograph contains three main parts. Chapter two presents theoretical assumptions concerning various types of probabilistic models which can be apply in mineral processing. The possibilities of approximation of curves and surfaces of beneficiation were presented, inter alia by means of Morgenstern techniques. The theoretical assumptions concerning the method of ordinary kriging were discussed too – the method which is mainly used in so-called geostatistics.

Furthermore, the rules of application of so-called nonparametric statistical methods to analyze both one- and multidimensional characteristics of grained materials were presented, including such methods as kernel ones and orthogonal Fourier series method. Also, the conditional distribution functions were discussed, taking into consideration so-called Bayesian methods.

Chapter three presents the practical applications of methods discussed theoretically in chapter two. The approximation of beneficiation curves and surfaces on the basis of coal were presented. To this purpose various statistical methods were applied, including Bayesian methods and nonparametric approximation. Moreover, the application of kriging method to interpolate the values of chosen parameters on the basis of coal characteristics was presented using various types of variogram functions. Such type of application of kriging method is unknown in previous ones.

The methodology applied in chapter three allowed to conclude that two-dimensional approximation of Henry's beneficiation curve can be applied successfully in practice. The application of nonparametric statistical methods (kernel methods and Fourier series method) to approximate the distribution of ash contents in coal being the mixture of materials collected from various layers gave very good results. On the basis of conducted research

it occurred that the ash contents distribution function in coal feed should be considered as the mixture of distribution functions of this purpose for individual layers. The application of Bayesian methods in approximation of Weibull distribution function parameters describing particle size distribution of the material allows to evaluate it more precisely. It is worthy then to consider the application of this method of estimation of distribution functions parameters by determining the theoretical particle size distribution curves, as well other features describing grained materials.

Moreover, the multidimensional analysis of grained material was presented on the example of coal divided into size and density fractions. Several methods of approximation were proposed – traditional one based on the product of particle size and particle density distribution functions and the method based on so-called Morgenstern distribution functions. It occurred that the Morgenstern method gave significantly better effects and quality of fitting to empirical data than the traditional product of two random variables. Apart from classical approximations in multidimensional analysis also the nonparametric ones were used. The applied methodology allowed to conclude that the application of Fourier series method to estimate regressive function gave the possibility to obtain analytical form of conditional distribution function of random variable describing particle size by assumed value of its density. Knowing about the particle density distribution which usually is approximated by Weibull or logistic functions it is possible to create the two-dimensional distribution describing particle size and its density.

The ordinary kriging method with its application to determine the values of various features of grained material in certain conditions turned out to be very useful tool. This method gives the possibility of obtaining very detailed information of researched material when the researcher do not have full results of analysis or they are not too precise. It was proved that the application of kriging method to issues connected with mineral processing allows to get better approximation of relations between characteristics of researched material. This method allows also to create more measuring data which can be the source of dividing the material into narrower fractions. This is the chance to obtain more precise models of various types of curves and surfaces being applied in mineral processing.

Chapter four presents the methods of visualization of multidimensional data. The method of observational tunnels was presented and discussed in the monograph which then was applied to visualize 7-dimensional data concerning three types of coal. On the basis of this method it was stated that the precise characteristics of grained material allows identification of its origin and gives the opportunity of determining differences between individual materials which are not easily visible by using traditional methods. These methods are modern and its applications in mineral processing is still unknown.

The whole monograph was ended with general conclusions connected with all methods applied in the book.

## **S**TUDIA, **R**OZPRAWY, **M**ONOGRAFIE

- 1** J. Dziewański (red.):  
*Oddziaływanie przemysłu siarkowego na środowisko przyrodnicze województwa tarnobrzskiego*
- 2** M. Księżyk:  
*Racjonalne gospodarowanie pierwotnymi nośnikami energii w Polsce*
- 3** E. Mokrzycki:  
*Metoda obliczania kosztów pozyskania sortymentów handlowych węgla kamiennego*
- 4** I. Soliński:  
*Metoda wyznaczania kosztów przyrostu pozyskania nośników energii w aspekcie zapotrzebowania gospodarki*
- 5** Z. Maciejewski i in.:  
*Określenie potrzeb energetycznych kraju na podstawie zmieniającego się w latach prognozy wskaźnika elastyczności zużycia energii względem dochodu narodowego wytworzonego*  
  
Z. Maciejewski i in.:  
*Koncepcja komputerowego systemu wspomagania decyzji w zakresie kompleksu paliwowo-energetycznego*
- 6** K. Wanielista, J. Kicki:  
*Sterowanie wykorzystaniem zasobów naturalnych kopalin w systemie nakazowym i w warunkach gospodarki rynkowej*
- 7** I. Soliński i in.:  
*Opracowanie metodyki ustalania kompleksowych kosztów pozyskiwania i przetwarzania krajowych surowców mineralnych*
- 8** J. Dziewański (red.):  
*Opracowanie kompleksowej metodyki badania oddziaływania górnictwa i przetwórstwa na środowisko oraz zasad i metod rekultywacji obszarów zdegradowanych (Synteza)*
- 9** J. Dziewański, U. Józefko:  
*Budowa geologiczna doliny środkowego Sanu między Niewistką a Dynowem*
- 10** J. Sokołowska:  
*Metodyka poszukiwania złóż kopalin płynnych*
- 11** S. Węclawik:  
*Kompleksowa metodyka badań ochrony surowców balneologicznych przed oddziaływaniem przemysłu*
- 12** R. Ney (red.) i in.:  
*Zwiększenie efektywności pozyskiwania i wykorzystania surowców mineralnych*
- 13** W. Suwała i in.:  
*Pakiet modeli gospodarki surowcami mineralnymi*
- 14** W. Blaschke i in.:  
*Metodyka optymalizacji wykorzystania surowców mineralnych w procesach przeróbki i przetwórstwa*
- 15** K. Wanielista i in.:  
*Zasady racjonalnej gospodarki zasobami naturalnymi złóż kopalin stałych*
- 16** E. Mokrzycki, S.A. Blaschke:  
*Metodyka liczenia kosztów wzbogacania węgla kamiennego*  
  
E. Mokrzycki, Z. Grudziński:  
*Metodyka liczenia kosztów przeróbki rud cynkowo-ołowiowych*
- 17** J. Dziewański (red.):  
*Zasady badań środowiska przyrodniczego w aspekcie jego ochrony*

- 18** S. Szukalski i in.:  
*Przegląd metod określania wpływu czynników ogólnogospodarczych na gospodarkę paliwowo-energetyczną kraju*
- 19** M. Nieć, Z. Kokesz:  
*Metody geostatystyczne w rozpoznawaniu i dokumentowaniu złóż oraz w ochronie środowiska*
- 20** E. Mokrzycki i in.:  
*Skutki oddziaływania zanieczyszczeń na środowisko przyrodnicze i metody szacowania strat*
- 21** Z. Pilecki:  
*Statystyczna analiza emisji sejsmoakustycznej dla kontroli zagrożenia tąpnięciami*
- 22** Praca zbiorowa pod red. E. Mokrzyckiego  
*Problemy kompleksowego wykorzystania surowców mineralnych*
- 23** K. Wanieliśta:  
*Wartość i metoda wyceny zasobów złóż kopalin stałych*
- 24** J. Wacławski, J. Kicki:  
*Gospodarka zasobami złóż węgla kamiennego w Górnśląskim Zagłębiu Węglowym w latach 1981–1990, cz. I*
- 25** J. Dziewański:  
*Budowa geologiczna terenów i problemy geologiczno-inżynierskie zbudowanych i projektowanych stopni wodnych w dolinie Sanu*
- 26** H. Gaj i in.  
*Model makroekonomiczny energia–ekologia–ekonomia. Podejście metodyczne*
- 27** E. Pietrzyk-Sokulska:  
*Petrogeneza utworów skalnych okolicy Młotów w Górach Bystrzyckich*
- 28** Praca zbiorowa pod red. I. Solińskiego:  
*Oplacalność pozyskiwania i wykorzystania wód geotermalnych w wybranych regionach Polski*
- 29** Praca zbiorowa pod red. J. Dziewańskiego:  
*Metodyka oceny walorów środowiska przyrodniczego na przykładzie województwa tarnobrzeskiego*
- 30** J. Kicki, J. Wacławski:  
*Gospodarka zasobami złóż węgla kamiennego w Górnśląskim Zagłębiu Węglowym w latach 1981–1990, cz. II*
- 31** Praca zbiorowa pod red. W. Blaschke:  
*Koncepcja systemu cen na węgiel kamienny w warunkach przejściowych do gospodarki rynkowej*
- 32** Praca zbiorowa pod red. R. Neya:  
*Energia odnawialna*
- 33** W. Sroczyński:  
*Karpackie grunty pokrywowe (nieskaliste) i ich rola w budownictwie wodnym*
- 34** Praca zbiorowa pod red. I. Solińskiego:  
*Prognozy kosztów oraz konkurencyjność odnawialnych i nieodnawialnych nośników energii w Polsce*
- 35** Praca zbiorowa pod red. E. Mokrzyckiego:  
*Technologie czystego węgla na etapie przeróbki i przygotowania węgla do procesu użytkowania*
- 36** M. Kudełko:  
*Koszty ekologiczne w strukturze kosztów polskiego przemysłu węglowego  
Projekt badawczy nr 0789/P1/93/05*
- 37** Praca zbiorowa pod red. W. Blaschke i E. Mokrzyckiego:  
*Węgiel koksowy na rynkach światowym i krajowym*
- 38** W. Suwała:  
*Badania modelowe perspektyw górnictwa i rynku węgla kamiennego w Polsce*

- 39** E. Pietrzyk-Sokulska:  
*Wpływ podziemnej eksploatacji i przeróbki węgla kamiennego na środowisko przyrodnicze w Polsce*
- E. Panek:  
*Wpływ eksploatacji i spalania węgla brunatnego na środowisko przyrodnicze w Polsce*
- 40** Praca zbiorowa pod red. J.J. Hycnara i E. Mokrzyckiego:  
*Technologie czystego węgla — odsiarczanie i demineralizacja za pomocą silnych zasad*
- 41** J. Dziewański, Z. Olszamowski:  
*Likwidacja filtracji wody przez masyw skalny prawego przyczółka zapory Wisła-Czarne*
- 42** J. Dziewański, E. Gąsiorowska, A. Mirosławska:  
*Zagadnienia geologiczno-inżynierskie rejonu stopnia wodnego Sromowce Wyżne na Dunajcu*
- 43** Praca zbiorowa pod red. K. Ślizowskiego:  
*Występowanie i rozkład jodu w biosferze rzeki Wisły*
- 44** S. Siewierski  
*Strategiczne i operacyjne modele optymalizacji, eksploatacji i przeróbki rud metali nieżelaznych*
- 45** Praca zbiorowa pod red. I. Solińskiego:  
*Wybrane zagadnienia metodyki badań efektywności górnictwa węgla kamiennego*
- 46** J. Jarosz:  
*Sposób wyznaczania zasięgu strefy spękań i lokalizacji odspojeń w stropie wyrobisk górniczych za pomocą metody sejsmicznej*
- 47** Praca zbiorowa pod red. J. Dziewańskiego:  
*Denudacja stoków w górnych odcinkach zlewni rzek karpackich*
- 48** B. Kępińska:  
*Model geologiczno-geotermalny niecki podhalańskiej*
- 49** K. Wanielista, S. Siewierski, J. Kicki, J. Butra:  
*Ekonomiczne aspekty eksploatacji zasobów złóż rud miedzi*
- 50** E. Pietrzyk-Sokulska:  
*Zagadnienia sozologiczne eksploatacji surowców skalnych (na przykładzie województwa nowosądeckiego)*
- 51** W. Suwała, M. Kudełko:  
*Analiza rynku paliw w Polsce w aspekcie wprowadzania instrumentów rynkowych w dziedzinie ochrony środowiska*
- 52** G. Gawrońska:  
*Metoda szacowania strat w rolnictwie i leśnictwie spowodowanych zanieczyszczeniem atmosfery*
- 53** W. Sroczyński:  
*Karpackie pokrywy czwartorzędowe w świetle wyników standardowych badań laboratoryjnych dla budownictwa wodnego (obiekty: Dobczyce, Krempna, Niewistka)*
- 54** J. Kicki, E. J. Sobczyk:  
*Zasoby przemysłowe węgla kamiennego kopalń Górnosląskiego Zagłębia Węglowego w latach 1981—1994*  
*Analiza i trend zmian*
- 55** J. Binder, J. Dziewański:  
*Budownictwo wodne a ochrona środowiska przyrodniczego*  
*System wodny Gabczikowo na Dunaju*
- 56** W. Dziurzyński:  
*Prognozowanie procesu przewietrzania kopalni głębinowej w warunkach pożaru podziemnego*
- 57** Praca zbiorowa pod red. W. Blaschke i R. Neya:  
*Formuły sprzedażne węgla kamiennego zmodyfikowane do wymogów sprawozdawczości Unii Europejskiej*
- 58** A. Sroka:  
*Dynamika eksploatacji górniczej w punktu widzenia szkód górniczych*



- 59 Z. Pilecki:  
*Modelowanie zachowania się masywu skalnego na podstawie badań empirycznych in-situ*
- 60 Praca zbiorowa pod red. J. Dziewańskiego:  
*Warunki geologiczno-inżynierskie podłoża Zespołu Zbiorników Wodnych Czorsztyn-Niedzica i Sromowce Wyżne im. Gabriela Narutowicza na Dunajcu*
- 61 Praca zbiorowa pod red. J. Dziewańskiego:  
*Określenie podatności stoków i brzegów potoków na erozję na przykładzie zlewni Ropy*
- 62 Praca zbiorowa pod red. J. Dziewańskiego:  
*Sozologiczne problemy w budownictwie wodnym*
- 63 Z. Grudziński:  
*System cenowy w górnictwie węgla brunatnego*
- 64 U. Lorenz:  
*Metoda oceny wartości węgla kamiennego energetycznego uwzględniająca skutki jego spalania dla środowiska przyrodniczego*
- 65 P. Dobak:  
*Rola czynnika filtracyjnego w badaniach jednoosiowej konsolidacji gruntów*
- 66 Praca zbiorowa pod red. J. Dziewańskiego:  
*Prognoza oddziaływania projektowanego zbiornika wodnego Krempna na środowisko przyrodnicze*
- 67 J. Topolnicki:  
*Wyrzuty skalno-gazowe w świetle badań laboratoryjnych i modelowych*
- 68 B. Uliasz-Misiak:  
*Technologia opróbowania poziomów wodonośnych rurowym próbnikiem złoża*
- 69 M. Kudełko, W. Suwała:  
*Analiza wpływu wprowadzenia w Polsce opłat produktowych i depozytów na koszty funkcjonowania podmiotów gospodarczych i gospodarstw domowych oraz poziom inflacji*
- 70 K. Czajka:  
*Geochemiczna i petrologiczna charakterystyka kontaktów złoża siarczkowego rud Zn–Pb ze skałami otaczającymi, w rejonie bytomskim*
- 71 S. Stryczek, A. Gonet:  
*Geoinżynieria*
- 72 M. Kudełko:  
*Model oceny funkcjonowania instrumentów zarządzania procesami redukcji emisji dwutlenku siarki w elektroenergetyce*
- 73 J. Dziewański, D. Grodecki:  
*Przesłona przeciwfiltracyjna pod lewym skrzydłem zapory w Myczkowcach na Sanie*
- 74 Praca zbiorowa pod red. R. Neya:  
*Energia odnawialna w ochronie środowiska*
- 75 Praca zbiorowa pod red. S. Rychlickiego:  
*Metody wykrywania zanieczyszczeń ropopochodnych w środowisku gruntowo-wodnym*
- 76 Praca zbiorowa pod red. W. Bujakowskiego:  
*Wybrane problemy wykorzystania geotermii — I*
- 77 W. Blaschke:  
*System cen energetycznego węgla kamiennego*
- 78 E.J. Sobczyk:  
*Wpływ zmian modelu gospodarczego na gospodarkę zasobami złóż węgla kamiennego w górnośląskim zagłębiu węglowym*
- 79 E. Panek:  
*Metale śladowe w glebach i wybranych gatunkach roślin obszaru polskiej części Karpat*

- 80** A. Uliasz-Bocheńczyk:  
*Wpływ wybranych dodatków mineralnych na właściwości mieszanin uszczelniających i wypełniających stosowanych w górnictwie podziemnym*
- 81** E. Pietrzyk-Sokulska, E. Panek:  
*Podstawy strategii ekorozwoju w aspekcie zmian administracyjnych kraju – wybrane elementy*
- 82** U. Lorenz:  
*Parytet importowy węgla kamiennego energetycznego*
- 83** J. Dziewański, J. Dudek, Z. Olszamowski:  
*Nowa przesłona przeciwfiltracyjna w podłożu lewego skrzydła i przyczółka zapory Wsła–Czarne*
- 84** Z. Pilecki, E. Popiołek:  
*Wpływ eksploatacji rud na zagrożenie powierzchni deformacjami nieciągłymi i jego badanie za pomocą metod geofizycznych*
- 85** J. Darski, J. Kicki, E.J. Sobczyk:  
*Raport o stanie gospodarki zasobami złóż węgla kamiennego*
- 86** J. Kwaśniewski:  
*Zastosowanie wybranych metod analizy sygnałów niestacjonarnych w diagnozowaniu lin i rur stalowych*
- 87** E. Mokrzycki:  
*Ceny węgla energetycznego oferowanego w latach 1990–1999 w portach głównych eksporterów*
- 88** L. Pająk:  
*Model numeryczny rozwoju strefy przemarzania gruntu w warunkach eksploatacji energii cieplnej*
- 89** J. Butra:  
*Metoda doboru systemu eksploatacji złóż rud miedzi w polach o jednorodnej charakterystyce geologicznej*
- 90** Praca zbiorowa pod red. S. Plewy:  
*Rozpoznanie pola ciepłego ziemi w obszarze Górnośląskiego Zagłębia Węglowego dla potrzeb górnictwa i ciepłownictwa*
- 91** Praca zbiorowa pod red. J. Dziewańskiego:  
*Tematyka prac naukowo-badawczych realizowanych w Instytucie Gospodarki Surowcami Mineralnymi i Energią PAN w XV-letnim okresie*
- 92** Praca zbiorowa pod red. W. Neya:  
*Wybrane problemy wykorzystania geotermii – II*
- 93** B. Kępińska:  
*Warunki hydrotermalne i termiczne podhalańskiego systemu geotermalnego w rejonie otworu Biały Dunajec PAN-1*
- 94** E. Mokrzycki:  
*Ceny węgla koksowego oferowanego w latach 1990–1999 w portach głównych eksporterów*
- 95** W. Suwała, M. Kudełko, J. Kamiński:  
*Rynek węgla kamiennego w Polsce*
- 96** J. Dziewański, Z. Pilecki, W. Sroczyński:  
*Zagadnienia badań geologiczno-inżynierskich w projektowaniu tuneli komunikacyjnych w utworach fliszu karpackiego – na przykładzie tunelu w Lalikach*
- 97** W. Dziurzyński, T. Pałka:  
*Komputerowy system monitoringu zagrożenia pożarowego i wyznaczania dróg ucieczkowych w warunkach pożaru w kopalni podziemnej*
- 98** E. Pietrzyk-Sokulska:  
*Waloryzacja obszarów występowania i eksploatacji złóż zwięzłych surowców skalnych na przykładzie Beskidów Zachodnich*
- 99** W. Sroczyński, A.K. Wota:  
*Prognozowanie oddziaływania karpackich zbiorników wodnych na środowisko geologiczne i powierzchnię ziemi*

- 100** U. Ozga-Blaschke:  
*Parytet importowy węgla koksowego*
- 101** P. Czaja:  
*Analiza nośności segmentowej obudowy szybów upodatkowanej materiałem nieliniowo sprężystym*
- 102** J. Dziewański, J. Starowicz:  
*Zastosowanie kruszywa z miejscowych złóż materiałów budowlanych do betonów hydrotechnicznych (na przykładzie zapory w Solinie)*
- 103** A. Wójcik:  
*Otrzymywanie pochodnych poliwinylkarbazolu o właściwościach elektroluminescencyjnych*
- 104** M. Giergiel:  
*Komputerowe wspomaganie w projektowaniu maszyn wibracyjnych*
- 105** P. Batko:  
*Wpływ właściwości strzelniczych materiału wybuchowego na efekt sejsmiczny strzelania*
- 106** L. Gawlik, I. Grzybek  
*Szacowanie emisji metanu w polskich zagłębieniach (system węgla kamiennego)*
- 107** M. Wójcik  
*Awaryjne hamowanie górniczych wyciągów szybowych urządzeniami ciemnymi – teoria, badania i aplikacje przemysłowe*
- 108** J. Mucha  
*Struktura zmienności zawartości [Zn] i [Pb] w śląsko-krakowskich złożach rud Zn-Pb*
- 109** J. Dziewański, Z. Pilecki  
*Ocena warunków geologiczno-inżynierskich na terenie powierzchniowych ruchów masowych na przykładzie osuwiska w Zgłobicach*
- 110** Praca zbiorowa pod redakcją E. Pietrzyk-Sokulskiej:  
*Uwarunkowania przyrodniczo-kulturowe funkcjonowania turystyki zrównoważonej w Beskidach Zachodnich*
- 111** W. Suwała, M. Kudełko, J. Kamiński:  
*Rynek węgla kamiennego w Polsce w latach 1991—2001*
- 112** U. Lorenz, W. Blaschke, Z. Grudziński:  
*Propozycja nowej formuły sprzedażnej węgla energetycznego przeznaczonego dla energetyki zawodowej*
- 113** B. Kępińska, A. Łowczowska:  
*Wody geotermalne w lecznictwie, rekreacji i turystyce*
- 114** J. Cieślik:  
*Metody natężeniowe w analizie elementów konstrukcyjnych*
- 115** Praca zbiorowa pod redakcją W. Sroczyńskiego:  
*Uwarunkowania geologiczne realizacji zbiornika przeciwpowodziowego Racibórz Dolny na Odrze*
- 116** Z. Blaschke, W. Blaschke:  
*Ocena celowości wzbogacania węgla na potrzeby energetyki w samodzielnych zakładach przeróbczych*
- 117** B. Kłojzy-Karczmarczyk:  
*Zastosowanie odpadów energetycznych w ograniczaniu transportu zanieczyszczeń ze składowisk odpadów górniczych*
- 118** J. Dziewański, A.K. Wota, D. Limanówka, E. Cebulak, S. Michalik:  
*Katastrofalny sływ wodno-gliniasty w Muszynie w lipcu 2002 roku*
- 119** U. Ozga-Blaschke:  
*Metoda powiązania parametrów jakościowych węgla koksowego z jego wartością użytkową*
- 120** J. Dziewański, Z. Pilecki:  
*Problemy rozpoznania geologiczno-inżynierskiego w projektowaniu tuneli drogowych Węgierska Górka i Miłówka*

- 121** M. Kudełko:  
*Efektywna alokacja zasobów w krajowym systemie energetycznym*
- 122** Praca zbiorowa pod redakcją W. Blaschke:  
*Funkcjonowanie górnictwa węgla kamiennego na podstawie uregulowań prawnych Unii Europejskiej w latach 1993—2002*
- 123** Praca zbiorowa pod redakcją W. Blaschke:  
*Możliwości funkcjonowania kopalń węgla kamiennego w Polsce w świetle przepisów UE dotyczących zasad świadczenia pomocy państwa dla górnictwa w latach 2002—2010*
- 124** T. Olkuski:  
*Straty energii chemicznej w procesach energetycznego wykorzystania węgla kamiennego*
- 125** A.P. Barbacki:  
*Zbiorniki wód geotermalnych niecki miechowskiej i środkowej części zapadliska przedkarpackiego*
- 126** J. Sałacki:  
*Model złoża rud miedzi dla potrzeb projektowania i prowadzenia eksploatacji*
- 127** Suwała W., Kudełko M., Kamiński J.:  
*The primary energy market in Poland in 1993—2002*
- 128** Nieć M., Matl K., Wyrwicki R., Wiśniewski J.:  
*Iły turoszowskie mit kopalni towarzyszących*
- 129** K. Ślizowski, J. Köhsling, L. Lankof:  
*Uwarunkowania podziemnego składowania odpadów niebezpiecznych w Polsce*
- 130** Publikacja zbiorowa pod redakcją E. Panek:  
*Uwarunkowania przyrodniczo-kulturowe rozwoju turystyki zrównoważonej w Bieszczadach*
- 131** E. Pietrzyk-Sokulska:  
*Kryteria i kierunki adaptacji terenów po eksploatacji surowców skalnych. Studium dla wybranych obszarów Polski*
- 132** R. Tarkowski:  
*Geologiczna sekwestracja CO<sub>2</sub>*
- 133** D. Grodecki:  
*Zależność wodo- i cementochłonności od budowy geologicznej podłoża zapory w Myczkowcach*
- 134** J. Kicki, E.J. Sobczyk:  
*Restrukturyzacja górnictwa w Polsce a struktura i wystarczalność zasobów węgla kamiennego*
- 135** B. Kępińska:  
*Warunki termiczne i hydrotermalne podhalańskiego systemu geotermalnego*
- 136** Praca zbiorowa pod red. B. Uliasz-Misiak:  
*Badania mikrobiologiczne wycieków CO<sub>2</sub> w rejonie Muszyny w celu opracowania metod biomonitoringu*
- 137** J. Ślizowski:  
*Geomechaniczne podstawy projektowania komór magazynowych gazu ziemnego w złożach soli kamiennej*
- 138** M. Kaliski, D. Staśko:  
*Bezpieczeństwo energetyczne w gospodarce paliwowej Polski*
- 139** M. Kudełko, W. Suwała, J. Kamiński:  
*Koszty zewnętrzne w energetyce – zastosowanie w badaniach modelowych*
- 140** L. Zawisza:  
*Hydrodynamiczne modelowanie basenów naftowych dla oceny ich perspektyw złożowych*
- 141** U. Ozga-Blaschke:  
*Międzynarodowy rynek węgla koksowego*

- 142** B. Uliasz-Misiak:  
*Pojemność podziemnego składowania CO<sub>2</sub> dla wybranych mezozoicznych poziomów wodonośnych oraz złóż węglowodorów w Polsce*
- 143** Praca zbiorowa pod red. M. Kudełko:  
*Scenariusze rozwoju krajowego sektora węgla kamiennego do 2020 roku – foresight technologiczny*
- 144** E. Pilecka:  
*Indukowane podziemną działalnością górnictwem wysokoenergetyczne wstrząsy górotworu a lineamenty na obrazach satelitarnych*
- 145** A.K. Wota:  
*Optymalizacja wyboru lokalizacji składowisk odpadów komunalnych z wykorzystaniem metody AHP (Analytic Hierarchy Process)*
- 146** M. Filipowicz:  
*Experimental investigations of m-atomic and m-molecular processes in muon catalysis of nuclear fusion reactions*
- 147** A. Szurlej:  
*Rola gazu ziemnego w bilansie paliwowo-energetycznym kraju ze szczególnym uwzględnieniem energetyki, w aspekcie wymogów ochrony środowiska*
- 148** L. Gawlik:  
*Wpływ poziomu wydobycia węgla kamiennego na koszty jego pozyskania w kopalniach*
- 149** H. Woźniak:  
*Osiadanie gruntów zwałowanych w świetle badań modelowych*
- 150** E.J. Sobczyk:  
*Uciążliwość geologiczno-górnictwowych warunków eksploatacji węgla kamiennego i jej wpływ na gospodarkę złożem*
- 151** R. Skrzypczak:  
*Jednostki przyrodniczo-kulturowe Beskidów w aspekcie turystyki zrównoważonej*
- 152** P. Saługa:  
*Ocena ekonomiczna projektów i analiza ryzyka w górnictwie*
- 153** A. Uliasz-Bocheńczyk:  
*Mineralna sekwestracja CO<sub>2</sub> w wybranych odpadach*
- 154** A. Malinowska:  
*Ocena zagrożenia uszkodzeniami obiektów budowlanych na terenach górniczych z wykorzystaniem wnioskowania rozmytego*
- 155** Praca zbiorowa pod red. W. Suwały:  
*Analiza problemu relokacji źródeł energii elektrycznej dla polskiego systemu elektroenergetycznego i przedsiębiorstw w wyniku polityki klimatycznej UE*
- 156** U. Lorenz, Z. Grudziński:  
*Międzynarodowe rynki węgla kamiennego energetycznego*
- 157** Praca zbiorowa pod red. K. Galosa:  
*Waloryzacja bazy zasobowej piasków szklarskich i ocena perspektyw złożowych w świetle współczesnych wymagań przemysłu szklarskiego*
- 158** B. Tomaszewska:  
*Transformations of soil and aquatic environment under the impact of anthropogenic factors – examples from the selected area in Skawina*
- 159** M. Kopacz:  
*Metoda wyceny projektów inwestycyjnych w polskim górnictwie rud miedzi z wykorzystaniem symulacji stochastycznej*
- 160** M. Nieć:  
*Kryteria geologiczne złoża (kryteria bilansowości)*

- 161** K. Galos:  
*Wpływ składu mineralnego wybranych itów na właściwości tworzyw gresowych*
- 162** T. Danek, A. Leśniak, A. Pięta:  
*Numerical modeling of seismic wave propagation in selected anisotropic media*
- 163** E. Lewicka:  
*Ocena kopaliny skaleniowo-kwarcowej ze Sławniowic (Sudety Wschodnie) jako potencjalnego surowca ceramicznego*
- 164** Praca zbiorowa pod redakcją R. Tarkowskiego:  
*Potencjalne struktury geologiczne do składowania CO<sub>2</sub> w utworach mezozoiku Niżu Polskiego (charakterystyka oraz ranking)*
- 165** W. Suwała, J. Kamiński, P. Kaszyński, M. Kudełko:  
*The primary energy tendencies in Poland*
- 166** L. Lankof:  
*Analiza odkształcalności i utraty masy zubrów brunatnych w aspekcie składowania odpadów promieniotwórczych w środkowopolskich wysadach solnych*
- 167** P. Saługa:  
*Elastyczność decyzyjna w procesach wyceny projektów geologiczno-górnictwa*
- 168** J. Ślizowski, K. Urbańczyk, D. Wiewiórka, M. Kowalski, K. Serbin:  
*Stateczność wyrobisk w pokładach ewaporatów LGOM w aspekcie budowy podziemnego laboratorium badawczego*
- 169** J. Kulczycka:  
*Ekoefektywność projektów inwestycyjnych z wykorzystaniem koncepcji cyklu życia produktu*
- 170** W.M. Bajdur:  
*Eko-polielektrolity syntetyczne redukujące ładunki zanieczyszczeń w ściekach i wodach przemysłowych*
- 171** H. Wirth:  
*Wieloczynnikowa wycena złóż i ich zasobów na przykładzie przemysłu metali nieżelaznych*
- 172** B. Rajpolt, B. Tomaszewska:  
*Zanieczyszczenie środowiska gruntowo-wodnego fluorem na przykładzie Huty Aluminium w Skawinie*
- 173** M. Kudełko, W. Suwała, J. Kamiński, P. Kaszyński:  
*Modelowanie rynków energii dla różnych systemów dystrybucji uprawnień do emisji dwutlenku węgla*
- 174** T. Olkuski:  
*Analiza produkcji węgla kamiennego i jego wykorzystanie w wytwarzaniu energii elektrycznej w Polsce*
- 175** J. Kamiński:  
*Siła rynkowa w krajowym sektorze wytwarzania energii elektrycznej*
- 176** Praca zbiorowa pod redakcją A. Uliasz-Bocheńczyk:  
*Zaczyny cementowe w technologiach wiertniczych geologicznego składowania CO<sub>2</sub>*
- 177** Praca zbiorowa pod redakcją E. Lewickiej:  
*Innowacyjne technologie pozyskiwania najważniejszych surowców ceramicznych i szklarskich*
- 178** M. Kudełko, W. Suwała, J. Kamiński, P. Kaszyński:  
*Handel uprawnieniami do emisji dwutlenku węgla w Unii Europejskiej*
- 179** K. Stala-Szlugaj:  
*Polish imports of steam coal from the East (CIS) in the year 1990–2011*
- 180** Z. Grudziński:  
*Metody oceny konkurencyjności krajowego węgla kamiennego do produkcji energii elektrycznej*
- 181** D. Foszcz:  
*Zasady określania optymalnych rezultatów wzbogacania wieloskładnikowych rud miedzi*

## **WSKAZÓWKI DLA AUTORÓW DOTYCZĄCE OPRACOWANIA I PRZYGOTOWANIA DO DRUKU PUBLIKACJI W DZIALE WYDAWNICZYM: STUDIA, ROZPRAWY, MONOGRAFIE**

1. Treść merytoryczna publikacji i sposób ich ujęcia powinny odpowiadać poziomowi działu i powinny odnosić się do tytułu działu: Studia, Rozprawy, Monografie.
2. Układ publikacji powinien być przejrzysty, zwarty, a jego treść podzielona na rozdziały tworzące zamkniętą całość. Objętość publikacji nie powinna być mniejsza od 5 arkuszy wydawniczych i nie powinna przekraczać 10 arkuszy wydawniczych (ok. 120 stron).
3. Każda publikacja powinna zawierać streszczenie w języku angielskim w objętości 1,5–2 strony maszynopisu. Tabele i rysunki zawarte w publikacji powinny również zawierać podpisy w języku angielskim.

## **WSKAZÓWKI DLA AUTORÓW DOTYCZĄCE PRZYGOTOWANIA TEKSTU NA Dyskiecie**

### **Wskazówki techniczne (przygotowanie elektronicznej wersji artykułu)**

Kompletny materiał do druku powinien zawierać (wersja elektroniczna):

- tekst zasadniczy,
- tytuł w języku polskim i angielskim,
- tytuły naukowe Autorów, miejsca pracy oraz adres e-mail do korespondencji,
- tabele i rysunki,
- podpisy pod tabele i rysunki w języku polskim oraz angielskim,
- streszczenia i słowa kluczowe w obu językach,
- podziękowania, jeśli występują,
- oświadczenie o źródłach finansowania (jeśli inne niż domyślne).

Autorzy spoza Polski, zgłaszający artykuł do druku w języku angielskim nie muszą przedstawiać polskiej wersji językowej – zostanie ona uzupełniona w Redakcji.

Dostarczenie elektronicznej wersji artykułu jest obowiązkowe.

Tekst powinien być zapisany w programie WORD FOR WINDOWS.

Zaleca się zastosowanie czcionki Times Roman 12 lub Arial 12.

Całkowita objętość artykułu nie powinna przekraczać 15 stron.

### **W trakcie wpisywania tekstu prosimy o przestrzeganie następujących zasad:**

- nie dzielić ręcznie wyrazów,
- nie justować poszczególnych linii akapitu za pomocą klawisza spacji,
- nie spacjować wyrazów (np. t y t u ł),
- nie podkreślać wyrazów, zdań (np. podkreślony).

**Streszczenia** w obu językach powinny zawierać co najmniej 1900 znaków ze spacjami i powinny odzwierciedlać merytoryczną zawartość artykułu.

**Tytuły i podtytuły** należy oddzielić od tekstu odstępem górnym i dolnym. Przy podziale tekstu na rozdziały i podrozdziały należy stosować numerację cyfrową wielorzędową:

- rozdziały – 1, 2, ...
- podrozdziały pierwszego stopnia – 1.1, 1.2, ..., 2.1, 2.2, ...
- podrozdziały drugiego stopnia – 1.1.1, 1.1.2, ..., 1.2.1, 1.2.2, ...
- podrozdziały trzeciego stopnia i ewentualnie inne tytuły pozostawia się zazwyczaj nienumerowane.

**Tabele i rysunki** należy umieścić w tekście po powołaniach. Zaleca się numerować je od 1 do *n* w obrębie całej publikacji.

**Rysunki** prosimy dostarczać również w wersji elektronicznej w osobnych plikach w formatach obsługiwanych przez program Corel DRAW 11 (np. \*.CDR, \*.CGM, \*.TIF, \*.JPG, \*.PCX, \*.IMG, \*.XLS).

**Wzory matematyczne** numeruje się podając numer ujęty w nawiasy okrągłe na prawym marginesie (jeśli jest ich mało, nie wymagają numeracji). **Wszelkie symbole we wzorach** i powołaniach na nie w tekście prosimy pisać pismem pochylm. Ważne jest, by 0 (zero) wpisane było przez klawisz cyfrowy, w celu odróżnienia go od litery O(o).

**Powołania** na cytowaną literaturę w tekście artykułu są obowiązkowe. W powołaniach na literaturę podajemy w nawiasie okrągłym nazwisko autora i rok wydania, np. (Rysiowa 1969) – jeden autor; (Nowakowski, Kapinos 1992) – dwóch autorów; (Kluz i in. 1972) – więcej niż dwóch autorów.

W przypadku prac zbiorowych posiadających redaktorów w nawiasie okrągłym podajemy nazwisko redaktora z adnotacją red. i rok wydania, np. (Zdun, red. 2004) – jeden redaktor; (Nowak, Kopa, red. 2003) – dwóch redaktorów; (Krus i in., red. 2000) – więcej niż dwóch redaktorów.

W przypadku prac zbiorowych nie posiadających redaktorów w nawiasie okrągłym podajemy początek tytułu i rok wydania, np. (Poradnik... 1971).

**Literatura** powinna być umieszczona na końcu pracy z oznaczeniem „LITERATURA”. Autor sporządza jeden wykaz literatury dla całej pracy, w której znajdują się tylko te pozycje, na które powołano się w tekście artykułu. Kolejność pozycji cytowanej literatury powinna być alfabetyczna (wg tekstów powołań).

Prawidłowy zapis bibliograficzny powinien zawierać:

- Książki jednego lub dwóch autorów:  
Nazwisko i inicjały imion autora, rok wydania: Tytuł. Oznaczenie kolejności wydania (Wyd. 1, 2, ...).  
Miejsce wyd., nazwa wydawcy, np.:  
Rysiowa H., 1969 – Wstęp do matematyki współczesnej. Wyd. 2. Warszawa, PWN.  
Rysiowa H., Nowakowski J., 1969 – Wstęp do matematyki współczesnej. Wyd. 2. Warszawa, PWN.
- Książki kilku autorów (powyżej dwóch):  
Powołanie plus prawidłowy zapis bibliografii:  
Rysiowa i in. 1969 – Rysiowa H., Nowakowski J., Kapinos J., 1969 – Wstęp do matematyki współczesnej.  
Wyd. 2. Warszawa, PWN.
- Artykuły z czasopism i innych wydawnictw ciągłych (jeden lub dwóch autorów):  
Nazwisko i inicjały imion autora, rok wydania: Tytuł artykułu. Pełny tytuł czasopisma (nie skrót), numer rocznika (tomu), numer zeszytu, strony, np.:  
Nowakowski J., Kapinos J., 1992 – Przemysł aluminiowy – stan obecny i tendencje zmian. Gospodarka Surowcami Mineralnymi t. 23, z. 1, s. 17–28.
- Artykuły z czasopism i innych wydawnictw ciągłych (powyżej dwóch autorów):  
Powołanie plus prawidłowy zapis bibliograficzny:  
Rysiowa i in. 1992 – Rysiowa H., Nowakowski J., Kapinos J., 1992 – Przemysł aluminiowy – stan obecny i tendencje zmian. Gospodarka Surowcami Mineralnymi t. 23, z. 1, s. 17–28.
- Prace zbiorowe (pod redakcją jednego lub dwóch redaktorów):  
Nazwisko i inicjały imion redaktora naukowego (z zaznaczonym skrótem red.), rok wydania: Tytuł. Oznaczenie kolejności wydania. Numer tomu (części, jeżeli jest). Wydawca, miejsce wydania, liczba stron, np.:  
Paszowski B., red., 1971 – Poradnik inżyniera. Elektronika. Wyd. 2, t. 1. WNT, Warszawa, s. 256.  
Pasikowski T., Gdowski A., red., 1994 – Zarys krystalografii. Wyd. 1, Wydawnictwo Praca i Płaca, Wrocław, s. 145.
- Prace zbiorowe (pod redakcją więcej niż dwóch redaktorów):  
Powołanie plus prawidłowy zapis bibliografii:  
Jackowski i in., red. 2007 – Jackowski T., Kryza O., Pasikow R., red., 2007 – Analiza gospodarki wodnej. Wyd. 1, WNT, Warszawa, s. 55.

Prace zbiorowe nie posiadające redaktorów:

Powołanie plus pełny zapis bibliografii: Tytuł. Oznaczenie kolejności wydania, Numer tomu (jeśli bibliografia wielotomowa). Wydawca, miejsce wydania, strony lub liczba stron, specyficzne oznaczenia, np.

Decyzja... 2003 – Decyzja nr 1230/2003/WE Parlamentu Europejskiego i Rady z dnia 26 czerwca 2003 r. przyjmująca wieloletni program działania w dziedzinie energii: Inteligentna Energia – Europa (2003–2006). Dziennik Urzędowy L 176, 15/07/2003 s. 0029–0036; 32003D1230.

Program... 2007 – Program rozwoju elektroenergetyki w latach 2007–2010. Ministerstwo Gospodarki, Warszawa, s. 68.